2017

مساعد الطالب في :

الرياضيات

للصف السادس الادبي

الأستاذ:سعد العبودي

_تابعونا على مواقع التواصل الجتماعي _

رحلة التفوق في السادس @

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بيـن ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشـر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الـى مجموعة قنواتنا التـدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطـرق الدراسـة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشـوكة بعض المحسـوبيـن علـى الكـادر التدريسي ممن يرفضون نشـر ملازمهم والتعـاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كـادر الشـبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشـبـاب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعـاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسـمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د : اشرف الوائلي

ا.د : مينا الاحمد

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الاول

(1) طرائق العد Counting methods

(2) مبدأ العد الاساسي Fundamental Counting methods

* اذا كان لدينا عدد من العمليات (الاختيارات) مقداره k ولمكن القيام بالعملية الاولى بعدد من الطرق مقداره n_1 وامكن القيام بالعملية الثانية بعدد من الطرق مقداره n_2 ... وهكذا فان عدد الطرق (النتائج) هو $(n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k)$

امثلة

مثال 1 اعلن صاحب محل لبيع الدراجات انه يوجد لديه خمسة انواع من الدراجات ومن كل نوع توجد ثلاثة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات في المحل ؟

الحل

عدد الدراجات (العمليات) $= 6 \times 3 \times 5 = 90$ دراجة

مثال 2 اعلن علي احد بائعي البدلات الرجالية ان لديه اكبر تشكيلة من البدلات حيث يوجد في محله (5) موديلات ومن كل موديل يوجد (10) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (7) الوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل

الحل

عدد البدلات $= 7 \times 10 \times 5 = 350$ بدلة

مثال 3 ⓐ اذا كانت لدينا الحروف م، ب، ج، د، هـ، ز
كم كلمة (بمعنى او بدون معنى) يمكن تكوينها بحيث تكون مكونة من اربعة حروف على انه لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟
ⓑ يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل

الحروف م، ب، ج، د، هـ، ز

عدد الحروف ← $\{$ 1، 2، 3، 4، 5، 6

2/1 b

تمارين (1-2)

(1) احسب قيمة كل مما يأتي

(a) $\frac{7!}{5!}$

الحل: $\frac{7!}{5!} = \frac{\cancel{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = 42$

(b) $\frac{\lfloor 10}{\lfloor 6} - \frac{\lfloor 9}{\lfloor 5}$

الحل: $= \frac{(10)(9)(8)(7)\cancel{\lfloor 6}}{\cancel{\lfloor 6}} - \frac{(9)(8)(7)(6)\cancel{\lfloor 5}}{\cancel{\lfloor 5}}$

$= 5040 - 3024 = 2016$

---

(2) جد قيمة n اذا كانت

(a) $n! = 5040$

الحل

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

14

$\Rightarrow n! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$

$n! = 7! \Longrightarrow n = 7$

(b) $P_2^n = 72$

الحل: $n(n-1) = 72 \longrightarrow n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0 \longrightarrow n = 9$ or $n = -8$ يهمل

(c) $P_5^n = 8 \times P_4^n$

الحل: $\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}(n-4) = 8\,\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}$

$n - 4 = 8 \longrightarrow n = 8 + 4 \longrightarrow n = 12$

مثال (5)

اذا كان لدى فتاة (6) قمصان مختلفة الالوان و (7) تنورات مختلفة الالوان و (4) احذية مختلفة الحجوم . فبكم زي مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة ؟

الحل

عدد طرق اختيار القميص الواحد = 6

" " " التنورة الواحدة = 7

" " " الحذاء الواحد = 4

∴ عدد الازياء التي تظهر بها الفتاة = $6 \times 7 \times 4$

$= 168$

مثال (6)

بكم طريقة يمكن تكوين عدداً رمزه مكون من (3) ارقام واقل من (500) يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 إذا كان

(أ) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

(ب) لا يسمح " " " " "

الحل

لاحظ الارقام التي اقل من 5 هي 1,2,3,4 ← عدد طرق اختيار المئات التي اقل من 500 هي 4 اختيارات

ثم في حالة السماح بتكرار الرقم فان عدد اختيار العشرات يكون العدد الكلي وهو 7 أرقام وكذلك الاحاد

اما في حالة عدم السماح بتكرار الرقم فان عدد اختيار العشرات يقل 1 عن العدد الكلي الذي تم اختياره للمئات ثم ينقص 1 عن عدد العشرات

الحل :-

(أ) السماح بتكرار الرقم في العدد نفسه

عدد طرق اختيار رقم المئات = 4

" " " العشرات = 7

" " " الاحاد = 7

∴ عدد الاعداد = $7 \times 7 \times 4$

$= 196$ عدداً

(ب) عدم السماح بتكرار الرقم

عدد طرق اختيار رقم المئات = 4

عدد " " " العشرات = 6

" " " " الاحاد = 5

∴ عدد الاعداد = $5 \times 6 \times 4$

$= 120$ عدداً

4/1

مثال 7

كم عدداً مكون رقمه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7 بحيث

(a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد يُسمح به ؟

(b) يكون العدد فردياً وتكرار الرقم في العدد نفسه مسموح به ؟

الشرح في هذا المثال (الزوجي والفردي) يجب ان نبدأ بـ عدد اختيار رقم الاحاد ثم العشرات ثم المئات) لان العدد الفردي (الزوجي) هو العدد الذي احاده رقم فردي

الحل (a)

$$1, \underset{1}{\underline{2}}, 3, \underset{2}{\underline{4}}, 5, \underset{3}{\underline{6}}, 7$$

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6 ← لان التكرار يُسمح به

عدد طرق اختيار رقم المئات = 5 لذلك ينقص 1 من العدد الكلي

∴ عدد الاعداد = $3 \times 6 \times 5 = 90$ عدداً

الحل (b)

$$\underline{1}, 2, \underline{3}, 4, \underline{5}, 6, \underline{7}$$

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 4

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7 ← لان التكرار مسموح به

عدد طرق اختيار رقم المئات = 7

عدد الاعداد = $4 \times 7 \times 7 = 196$ عدداً

4

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة

تمارين (1-1)

(1) لدى احمد (5) سترات مختلفة (6) بنطلونات مختلفة (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من سترة وبنطلون وقميص ؟

الحل

عدد الطرق $= 5 \times 6 \times 8 = 240$ طريقة يمكن ان يظهر بها احمد

(2) اذا كان لدينا الحروف م - ل - ع - ق - ك - ب كم كلمة مكونة من اربعة احرف (بمعنى او بدون معنى) من هذه الحروف على انه لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل

التكرار غير مسموح به

م	ق
ل	ك
ع	ب

نتخيل ان عدد الحروف الستة في صندوق .
عندما نسحب حرف يبقى في الصندوق 5 احرف وهكذا

عدد طرق اختيار الحرف الاول $= 6$
عدد طرق اختيار الحرف الثاني $= 5$
عدد طرق اختيار الحرف الثالث $= 4$
عدد طرق اختيار الحرف الرابع $= 3$

عدد الطرق (الكلمات) $= 6 \times 5 \times 4 \times 3$
$= 360$ كلمة

(3) بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينة مختلفة ؟ حيث يكون الاول رئيس والثاني نائب رئيس والثالث امين سر ؟

الحل

الوظيفة الاولى
عدد طرق اختيار الرئيس = ١٠

الوظيفة الثانية
عدد طرق اختيار نائب الرئيس = ٩

الوظيفة الثالثة
عدد طرق اختيار امين السر = ٨

∴ عدد الطرق = ١٠×٩×٨
= ٧٢٠ طريقة

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(4) كم عدداً رمزه مكون من ثلاثة ارقام يمكن تكوينه باستخدام الارقام 3,4,5,6,7,8,9
(a) على ان يكون العدد فردياً والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه
(b) على ان يكون العدد زوجياً والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه

الحل

(a) 3,4,5,6,7,8,9

العدد فردي + التكرار غير مسموح

عدد اختيار رقم الاحاد = 4

يجب البدء بالاحاد ثم العشرات ثم المئات

عدد اختيار رقم العشرات = 6

ينقص واحد من العدد الكلي

عدد اختيار رقم المئات = 5

ينقص واحد من العشرات

عدد الاعداد $= 5 \times 6 \times 4$

$= 30 \times 4$

$= 120$

(6)

(b) 3,4,5,6,7,8,9

العدد زوجي + التكرار مسموح به

عدد اختيار رقم الاحاد = 3

عدد اختيار رقم العشرات = 7

يبقى العدد الكلي نفسه لان التكرار مسموح

عدد اختيار رقم المئات = 7

يبقى العدد الكلي نفسه

عدد الاعداد $= 7 \times 7 \times 3$

$= 7 \times 21$

$= 147$ عدداً

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(5) كم عدداً يكون رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه باستخدام الارقام 1,2,3,4,5,6,7

(a) على ان يكون العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به للرقم نفسه

(b) على ان يكون العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به للرقم نفسه

الحل

(a) 1,2,3,4,5,6,7

العدد الكلي = 7

1,2,3,4,5,6,7

1 2 3

الاعداد التي اكبر من 500 هي 3 اعداد لان العدد 5 يدخل ضمن الحساب

اما في حالة اصفر فلا يدخل العدد ضمن الحساب

التكرار مسموح به يبقى العدد الكلي نفسه

عدد اختيار رقم المئات = 3

عدد اختيار رقم العشرات = 7

عدد اختيار رقم الاحاد = 7

عدد الاعداد = 3×7×7

= 21×7

= 147 عدداً

(b) 1,2,3,4,5,6,7

1 2 3

الاعداد التي اصغر من 400 هي 3 اعداد لان العدد 4 لا يدخل ضمن الحساب

عدد اختيار رقم المئات = 3

التكرار غير مسموح به لذلك ننقص 1 من 7

عدد اختيار رقم العشرات = 6

ننقص 1 من 6

عدد اختيار رقم الاحاد = 5

عدد الاعداد = 3×6×5

= 3×30

= 90 عدداً

7

مضروب العدد (Factorial)

رمزه $n!$ أو $\lfloor n$ ويقرأ مضروب او (مفكوك) n

حيث n عدد طبيعي

قانونه

$$\lfloor n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times 3\times 2\times 1$$

امثلة

$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

نبدأ بنفس العدد ثم ننقص واحد حتى نصل الى العدد 1

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

$\lfloor 3 = 3\times 2\times 1 = 6$

$\lfloor 2 = 2\times 1 = 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

مثال 1 اكتب بابسط صورة $\frac{8!}{6!}$

$\frac{8!}{6!}$?

الحل

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8\times 7\times \cancel{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}}{\cancel{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}} = 8\times 7 = 56$$

مثال 2 جد ناتج $\frac{3!}{4!}$ ؟

الحل

$$\frac{3!}{4!} = \frac{\cancel{3\times 2\times 1}}{4\times \cancel{3\times 2\times 1}} = \frac{1}{4}$$

مثال 3 جد ناتج $\frac{5!}{0!}$ ؟

الحل

$$\frac{5!}{0!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{1} = 120$$

8/1
b

مثال 4 جد $9!$

الحل

$9! = 9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 362880$

أو $9! = 9\times 8!$

أو $9! = 9\times8\times7!$

أو $9! = 9\times8\times7\times6!$

صورة عامة

$n! = n(n-1)!$

أو

$n! = n(n-1)(n-2)!$

مثال 5 اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ فما قيمة n ؟

الحل

$\frac{n!}{(n-2)!} = 6 \rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 6$

$n(n-1) = 6 \rightarrow n^2 - n - 6 = 0 \rightarrow (n+2)(n-3) = 0$

$n = -2$ يهمل or $n = 3$

مثال 6 اذا كان $n! = 720$ فما قيمة n ؟

ج

720	1
720	2
360	3
120	4
30	5
6	6
1	

$720 = 1\times2\times3\times4\times5\times6$

$720 = 6!$

$\because n! = 720$

$6! = n!$

$6 = n$

التباديل Permutations

رمزه P_r^n حيث n, r اعداد طبيعية $\in \{0,1,2,\ldots\}$

$r \leq n$ العدد n دائماً اكبر من او يساوي العدد r

تقرأ تباديل n مأخوذه منه r في كل مرة

قانون (1)

$$\boxed{P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}$$

امثلة

(1) $P_3^5 = 5\times4\times3$ اي $r=3$ تعني عدد الخطوات بدءاً من 5

$= 20\times3 = 60$

(2) $P_2^5 = \underbrace{5}_{1}\times\underbrace{4}_{2} = 20$

(3) $P_1^5 = 5$

(4) $P_0^5 = 1 \longrightarrow \boxed{P_0^n = 1}$ اي اذا كانت $r=0$ لاي قيمة n ⟸ التباديل $=1$

(5) $P_5^5 = 5\times4\times3\times2\times1$ عدة خطوات r

$= 5! = 120$

$\therefore \boxed{P_r^n = n! \text{ اذا } n=r}$ اي التباديل = مضروب العدد اذا كانت $n=r$

قانون (2) يستخدم في حالة r مجهولة

$$\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

مثال اذا كان $P_3^6 = P_r^6$ اثبت ان $r=3$ ؟

الحل

$\because P_3^6 = P_r^6 \longrightarrow \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{(6-r)!} \longrightarrow \frac{1}{3!} = \frac{1}{(6-r)!}$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين $3! \times (6-r)! = 3! \times$

$6-r=3 \longrightarrow r=6-3 \longrightarrow r=3$

∴ نتوصل الى القاعدة

$$\boxed{\text{اذا } P_r^n = P_k^n \longrightarrow r=k}$$

مثال 2 احسب كلاً مما يأتي

$P_3^6 \ , P_4^4 \ , P_0^{10}$

الحل

$* P_3^6 = \underset{1}{\underline{6}} \times \underset{2}{\underline{5}} \times \underset{3}{\underline{4}}$ لاحظ ان عدد الخطوات $r=3$

$= 30 \times 4 = 120$

$* P_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

11 $* P_0^{10} = 1 \longleftarrow$ حسب القاعدة $P_0^n = 1$

مثال 3 ما عدد طرق توزيع (5) وظائف مختلفة على (5) اشخاص لكل واحد منهم وظيفة واحدة ؟

الحل

$P_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

مثال 4 جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 42$ ؟

الحل

ان P_2^n تعني ان $r=2$ اي خطوتين تنزل من n

$P_2^n = 42$

$n(n-1) = 42$ خاصية التوزيع

$n^2 - n - 42 = 0$

$(n-7)(n+6) = 0$

$\therefore n=7 \quad or \quad n=-6$ يهمل لانه سالب

تدرب ايها الطالب

س: جد قيمة n لكل من

1. $P_2^n = 12$ $(n=4)$
2. $P_2^n = 20$ $(n=5)$
3. $P_2^n = 30$ $(n=6)$
4. $P_2^n = 56$ $(n=8)$
5. $P_2^n = 72$ $(n=9)$
6. $P_2^n = 90$ $(n=10)$
7. $P_2^n = 110$ $(n=11)$
8. $P_2^n = 132$ $(n=12)$
9. $P_2^n = 156$ $(n=13)$.

مثال 5

جد قيمة P_5^8 ؟

الحل

$$P_5^8 = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$$

$r=5$ خطوات

ملاحظة

مسائل تدل على التباديل

1. الحروف بدون تكرار
2. الاعداد بدون تكرار
3. اللجان مع التمييز (رئيس، نائب رئيس،...)
4. التطبيقات من $r \leftarrow n$
5. كلمة (كم ترتيب مختلف...)

(12)

التباديل دائماً

الترتيب مهم

اي عند تغيير المواقع او الاماكن يؤثر على النتيجة مثل الحروف

ا، ل، ع، ر، ا، ق

العراق الرعاق

بدون ارجاع (بدون تكرار)

اي عند السحب من الصندوق لا يعاد.

او عند اختيار الرقم لا يكرر

مثال 6) ما عدد الاعداد التي رقم كل منها مكون من ثلاثة ارقام مأخوذة من بين الارقام

8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3

(a) دون تكرار الرقم في العدد

(b) يمكن تكرار الرقم في العدد

الحل

(a) اعداد وبدون تكرار ← تباديل

(تحل بالتباديل او مبدأ العد)

$P^6_3 = 6 \times 5 \times 4$
$= 30 \times 4 = 120$

(b) اعداد ومع التكرار ← مبدأ العد

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 6

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيار رقم المئات = 6

(13)

عدد الاعداد = $6 \times 6 \times 6 = 216$ عدداً

أو طريقة اخرى للحل

اعداد ومع التكرار = $(ن)^ر = (6)^3 = 6 \times 6 \times 6$
$= 216$ عدداً

مثال 7) كم كلمة يمكن تكوينها مكونة من اربعة حروف مختلفة مأخوذة من الحروف

أ , ب , جـ , د , هـ ؟

الحل

عدد الكلمات = P^5_4

$\frac{أ}{1} , \frac{ب}{2} , \frac{جـ}{3} , \frac{د}{4} , \frac{هـ}{5}$

$P^5_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ كلمة

ملاحظة اذا لم يذكر .... (الحروف او التكرار)

12 / 1

(د) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$

الحل

$\frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=30 \rightarrow n^2+n-30=0$

$(n+6)(n-5)=0 \rightarrow n=-6$ يهمل or $n=5$

س3 اذا كانت لدينا المجموعة $X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ فكم عدداً يمكن تكوينه اذا كان:

(a) رمزه مكون من ثلاثة ارقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل

$P(7,3)=7\cdot6\cdot5=30\cdot7=210$

(b) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل

$(7)^3=7\cdot7\cdot7=343$

(c) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اصغر من (400) بدون تكرار الرقم في العدد

الحل

عدد طرق اختيار رقم المئات = 3

= = = العشرات = 6

= = = الاحاد = 5

$3\cdot6\cdot5=90$ عدد

(d) رمزه مكون من ثلاثة ارقام اكبر من (200) ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

الحل

عدد طرق اختيار رقم المئات = 6

= = = العشرات = 7

= = = الاحاد = 7

$6\cdot7\cdot7=294$ عدد

(e) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون زوجياً بدون تكرار الرقم في العدد نفسه

الحل

عدد طرق اختيار رقم الاحاد : 3

= = = العشرات : 6 $\Longleftarrow 3\cdot6\cdot5=90$

= = = المئات : 5

(f) رمزه مكون من ثلاثة ارقام ويكون فردياً ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

الحل

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 4

= = = العشرات = 7 $\Longleftarrow 4\cdot7\cdot7=196$

= = = المئات = 7

16

12/1

س4 يجري في احد الصفوف انتخاباً على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وامين السر. ما عدد النتائج التي تفرزها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب ؟

الحل

$P(10,3)=(10)(9)(8)=720$

س5 كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من ثلاثة حروف من بين حروف كلمة (ذكي قار) ؟

الحل

{ذ ، ك ، ي ، ق ، ا ، ر}

$P(5,3)=5\cdot4\cdot3=60$ كلمة

س6 بكم طريقة يمكن ان يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي ؟

$P_5^8=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720$ طريقة

15

التوافيق Combinations

* رموزه C^n_r أو $\binom{n}{r}$ أو $C(n,r)$

n, r اعداد طبيعية ، $r \leq n$

قانون التوافيق

$$C^n_r = \frac{P^n_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots(3)\times 2\times 1}$$

أو

$$C^n_r = \frac{P^n_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

امثلة جد قيمة =

(a) C^5_3 ?

الحل

$$C^5_3 = \frac{P^5_3}{3!} = \frac{5\times \cancel{4}^{2}\times \cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1} = 10$$

اي = $\frac{\text{تباديل}}{\text{مضروب } r}$

17

(b) $C^3_3 = \frac{P^3_3}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1 \rightarrow$ يمكن كتابة القاعدة التالية

$$\boxed{\text{if } r=n \rightarrow C^n_r = 1}$$

(c) C^4_0

الحل

$C^4_0 = \frac{P^4_0}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow$ يمكن كتابة القاعدة التالية

$$\boxed{\text{if } r=0 \rightarrow C^n_r = 1}$$

(d) $C^{100}_2 = \frac{\cancel{100}^{50}\times 99}{\cancel{2}} = 4650$

(e) $C^{100}_{98} \rightarrow$ $\boxed{C^n_r = C^n_{n-r}}$ تحل حسب قاعدة التصغير

الحل $C^{100}_{98} = C^{100}_{2} = 4650$

حل المسائل المتعلقة بالتوافيق

التوافيق

(1) الترتيب غير مهم

اي عند تغيير المواقع او الاماكن لا يؤثر على النتيجة

(2) بدون ارجاع (بدون تكرار)

اي عند السحب لا يعاد
او عند اختيار الرقم لا يكرر

* مسائل تدل على التوافيق

(1) المجموعات ، المجموعات الجزئية
(2) القطع المستقيمة ، المثلثات ، المربعات ، المضلعات ----
(3) اللجان بدون تمييز
(4) الاسئلة الامتحانية
(5) كلمة (ليس مهما الترتيب)
(6) كلمة (دون مراعاة الترتيب)

مثال 4 اذا كان عدد الاسئلة في الورقة الامتحانية (8) اسئلة والمطلوب الاجابة على (6) منها . فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل ان الترتيب غير ضروري في الاجابة على الاسئلة الامتحانية لذلك يحل بالتوافيق ⟸ عدد الطرق $= C^8_6$

$$C^8_6 = C^8_2 = \frac{\cancel{8}^4 \times 7}{\cancel{2} \times 1} = 28$$ طريقة

مثال 5 كم قطعة مستقيم يمكن تكوينها من مجموعة فيها (6) نقاط والتي لا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة

الحل تتكون القطعة المستقيمة من نقطتان ⟵ الحل عن طريق التوافيق

$$C^6_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

15/1

مثال (6) جد قيمة n اذا كان

$$2\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$$

الحل

مفتاح حل جميع اسئلة لـ n هو هذا المخطط

$$2\frac{\cancel{n}(\cancel{n-1})}{\cancel{2}\times1}=\frac{(n+1)(\cancel{n})(\cancel{n-1})}{3\times2\times1}$$

$$1=\frac{n+1}{6} \quad (\text{طرفين = وسطين})$$

$$n+1=6 \longrightarrow n=6-1 \longrightarrow n=5$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ n+3 \\ n+2 \\ 1 \longrightarrow n+1 \\ 2 \longrightarrow n \\ 3 \longrightarrow n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ \vdots \end{array}$$

19

مثال 7 بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (5) طالبات و (7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات و (10) طلاب ؟

الحل

اللجان بدون تمييز ⟸ الحل بالتوافيق

تم اختيار 5 طالبات من 8 طالبات و 7 طلاب من 10 طلاب

$$\text{عدد الطرق}=\begin{array}{cc} \text{طالبات} & \text{طلاب} \\ \binom{8}{5} & \binom{10}{7} \end{array}$$

يمكن حلها مباشرة أو عن طريق قاعدة التصغير

$$=\binom{8}{3}\binom{10}{3}$$

$$=\frac{8\times7\times\cancel{6}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}\times\frac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}$$

$$=56\times120$$

$$=6720 \text{ طريقة}$$

تمارين (3-1)

-1- جد قيمة كلاً مما يأتي:

(a) C_5^{11}

الحل

$$C_5^{11} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}$$

نتزل من 11 خمسة خطوات
نتزل من 5 حتى الواحد

$$= 11\times42 = 462$$

(b) $C(18,18)$

الحل

$C(18,18) = 1$

حسب القاعدة $C(n,r)=1$
اذا $n=r$

(c) $\binom{7}{0}$

الحل

$\binom{7}{0} = 1$

حسب القاعدة $C(n,r)=1$
اذا $r=0$

(d) $\frac{1}{210}\left[P_3^7 + P_4^7\right]$

الحل

$P_3^7 = 7\times6\times5 = 7\times30 = 210$

$P_4^7 = 7\times6\times5\times4 = 210\times4 = 840$

$$\therefore \frac{1}{210}\left[P_3^7 + P_4^7\right] = \frac{P_3^7}{210} + \frac{P_4^7}{210} = \frac{210}{210} + \frac{840}{210}$$

$$= 1 + 4 = 5$$

-2- جد قيمة n إذا كان $C_{20}^{n} = C_{35}^{n}$ ؟

الحل

$20+35=55 \longrightarrow n=55$

حسب قاعدة التصغير $\binom{n}{r} = C_{n-r}^{n}$

نجمع $r+n-r=n$

-3- اي العبارات الاتية صائبة واي منها خاطئة ؟

(a) $C_6^{10} = C_4^{10}$

الحل صائبة

حسب قاعدة التصغير

الأستاذ سعد البحرية

(b) $C_{23}^{25} = \frac{P_2^{25}}{2!}$

الحل صائبة $C_{23}^{25} = C_2^{25} = \frac{P_2^{25}}{2!}$ حسب قاعدة التصغير

(c) اذا كان $\binom{n}{4} = \binom{n}{6}$ فان $n=10$ صائبة

حسب قاعدة التصغير

(d) عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على ثلاثة عناصر التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصره عشرة هو C_3^{10}

الحل صائبة

(e) سبعة اشخاص ليسو متمايزين يكون عدد طرق اختيار ثلاثة منهم هو P_3^7 ؟

خاطئة لان الحل يكون بالتوافيق وليس بالتباديل لان كلمة ليسو متمايزين اي ليسو مرتبين اي ان الترتيب غير مهم $= C_3^7$

(f) عدد طرق اختيار شخصين من بين سته اشخاص دون مراعاة الترتيب عند الاختيار = 15 طريقة ؟

الحل كلمة دون مراعاة الترتيب ⟸ الحل عن طريق التوافيق صائبة

$C_2^6 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$ طريقة

(g) $P_0^3 - 2\lfloor 0 = -1$

الحل صائبة $P_0^3 - 2\lfloor 0 = 1-2(1) = 1-2 = -1$

(h) لكل $r \in N$, n اذا كان $P_r^5 = P_n^5$ فان $n=r$.

صائبة

21

س1) اختر الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي

(a) عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين (10) اشخاص يساوي

(1) P_3^{10} (2) C_3^{10} (3) $\frac{10!}{3!}$ (4) ليس اي مما سبق

الحل

لجان بدون تمييز ⟸ الجواب (2) C_3^{10}

(b) اذا كان (n) عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (6) فان n يساوي:

(1) 15 (2) 6 (3) 4 (4) 2

الحل

الجواب الصحيح (1) 15 ⟵ $C_2^6 = \frac{6\times5}{2} = 15$

(c) عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين اي رأسين من رؤوس مضلع سداسي يساوي

(1) 6×6 (2) C_2^6 (3) P_2^6 (4) $\lfloor 6$

الحل

الجواب الصحيح (2) C_2^6 لان كل نقطتين تكون قطعة مستقيمة واحدة

(d) $\binom{68}{8} \div C_{60}^{68} =$

(1) 68 (2) $\frac{8}{60}$ (3) 1 (4) $\frac{P_8^{68}}{8}$

الحل

الجواب الصحيح هو (3) 1 لان $\binom{68}{8} \div C_{60}^{68}$

حسب قاعدة التصغير $= \binom{68}{8} \div C_8^{68} = 1$

(e) اذا كان لدينا الارقام 1,2,3,4,5,6,7,8,9

فان عدد الاعداد المكون رمزها من اربعة ارقام مختلفة من بين هذه الارقام هو

(1) $\lfloor 9$ (2) $\binom{9}{4}$ (3) $\lfloor 4$ (4) ليس اي مما سبق

الحل

الجواب الصحيح هو (4) ليس اي مما سبق لان الحل يكون عن طريق التباديل P_4^9

الاستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

22

س5 يراد تشكيل لجنة من ستة اعضاء من بين (5) طلاب و (8) مدرسين ، فبكم طريقة يمكن ان تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين ؟

الحل

في هذه الاسئلة يفضل ان نعرف اللجنة الكلية نلاحظ ان العدد الكلي = 5+8 = 13 يراد اختيار 6 منهم بشرط ان تكون في اللجنة 2 مدرسين .

$$\overset{\text{كلي}}{\binom{13}{6}} = \binom{8}{2}\binom{5}{?}$$

؟ = 4 لان عدد اللجنة = 6 اثنان منها مدرسين ⇐ 6-2

$$= \overset{\text{مدرسين}}{\binom{8}{2}}\overset{\text{طلاب}}{\binom{5}{4}}$$

$$= \frac{{}^{4}\cancel{8}\times 7}{\cancel{2}\times 1} \times \frac{5\times \cancel{4\times 3\times 2}}{\cancel{4\times 3\times 2\times 1}} = 28\times 5 = 140$$

23

س6 صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء ، (8) كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً . جد عدد طرق سحب
(1) اثنتان حمراء وواحدة بيضاء
(2) على الاقل اثنتان حمراء

بيضاء	حمراء
8	4

2   1

2 حمراء و 1 بيضاء

2 و 1 ب
أو 3 ح

الحل

نلاحظ عدد الكرات الكلي = 12 كرة
يراد سحب 3 كرات معاً

(1) $\overset{\text{كلي}}{\binom{12}{3}} = \overset{\text{حمراء}}{\binom{4}{2}}\overset{\text{بيضاء}}{\binom{8}{1}}$

$$= \frac{4\times 3}{2\times 1}\times 8 = 6\times 8 = 48$$

(2) على الاقل تعني أما 2 حمراء و 1 بيضاء أو 3 حمراء

لان السحب 3 كرات

$$\overset{\text{حمراء}}{\binom{4}{2}}\overset{\text{بيضاء}}{\binom{8}{1}} + \overset{\text{حمراء}}{\binom{4}{3}} = 48 + 4 = 52$$

كلمة أو تعني +

20/1

(7) اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما هو (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة منها على ان تختار (4) من الخمسة الاولى . فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل

$$\binom{10}{7} = \binom{5}{4}\binom{5}{3}$$

∵ المطلوب الاجابة عن 7 اسئلة من 10 بشرط ان تكون 4 من 5 الاولى لذلك 10-5=5 7-4=3

$$= \frac{\cancel{5\times4\times3\times2}}{\cancel{4\times3\times2\times1}} \times \frac{5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3}}{\cancel{3\times2}\times1}$$

$$= 5\times10 = 50 \text{ طريقة}$$

اسئلة الواجب البيتي

س1 كم عدداً زوجياً مكون من ٣ مراتب واقل من 600 يمكن تكوينه باستخدام الارقام 9 ,8 ,7 ,6 ,5 ,4 ,3 اذا كان تكرار الرقم في العدد نفسه غير مسموح به

س2 ستة اشخاص يقفون على خط مستقيم ؛ بكم ترتيب مختلف ممكن لطريقة وقوفهم ؟ (2-4)

س3 كم مربعاً يمكن الحصول عليه من مجموعة من النقط عددها (12) نقطة لا تقع ثلاثة منها على استقامة واحدة

س4 جد عدد التطبيقات من مجموعة $x = \{1,2,3\}$ الى مجموعة y حيث $y = \{1,2,3,4,5\}$

س5 اذا كان $C_r^n = 36$ ، $P_r^n = 72$ فما قيمة كل من n ، r ؟

س6 جد قيمة n اذا علمت

(1) $C_2^{n+1} = 21$ (2) $\binom{n}{2} = 36$ (3) $P_2^{n+1} = 42$

(4) $\frac{P_2^n}{3!} = 5$ (5) $\binom{n}{4} = \binom{n}{2}$ (6) $C_2^n = 45$

(7) $\binom{n}{2} = 66$ (8) $\binom{n+1}{3} = 2\binom{n}{2}$ (9) $\binom{n}{2} = 105$

(10) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ (11) $P_3^n = 56(n-2)$ (12) $C_2^n = 15$

الأستاذ سعد العبردي

21/1

Bionomial Theorm مبرهنة ذات الحدين

هي قانون لايجاد ناتج مجموع حدين اي مقدار مكون من مجموع حدين مثل $(x+y)$ اذا رفع الى اي اس صحيح موجب

مثال 1

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

نلاحظ

(1) عدد الحدود $= 2+1 = 3$ حدود

(2) اس الحد الاول $= n = x^2$

واس الحد الاخير $= n = y^2$

(3) معامل الحد الاول $= 1 = C_0^2$

معامل الحد الثاني $= 2 = C_1^2$

معامل الحد الثالث $= 1 = C_2^2$

25

مثال 2

$$(x+y)^3 = C_0^3 x^3 + C_1^3 x^2 y + C_2^3 x y^2 + C_3^3 y^3$$
$$= 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$C_0^3 = 1$ معامل الحد الاول ، $C_1^3 = 3$ معامل الحد الثاني ، $C_2^3 = \frac{3\times 2}{2\times 1} = 3$ معامل الحد الثالث ، $C_3^3 = 1$ معامل الحد الرابع

مثال 3

$$(x+y)^4 =$$

(1) عدد الحدود $= 4+1 = 5$

(2) الحد الاول $= x^4$ والحد الاخير $= y^4$

(3) الحد الثاني yx^3 ثم y^2x^2 ثم y^3x ثم y^4

اي اس x تنازلي و اس y تصاعدي

$$\therefore (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$= C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3 y + C_2^4 x^2 y^2 + C_3^4 x y^3 + C_4^4 y^4$$

$\therefore$ قانون مفكوك ذي الحدين هو ←

قانون مفكوك ذي الحدين

$$(x+y)^n = C^n_0 x^n + C^n_1 x^{n-1} y + C^n_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + C^n_n y^n$$

حيث n عدد صحيح موجب

ملاحظات

(1) عدد حدود المفكوك $= n+1$

(2) مجموع اسس y و x في كل حد من حدود المفكوك $= n$

(3) معامل كل حد رتبته r في مفكوك $(x+y)^n$ هو C^n_{r-1}

مثال معامل الحد الخامس في مفكوك $(x+y)^8$ هو

$$C^8_{5-1} = C^8_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$$

مثال معامل الحد الثالث في مفكوك $(x+y)^5$ هو

$$C^5_{3-1} = C^5_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$$

(4) في مفكوك $(x+y)^n$ يكون اس الحد الاول x^n

اس الحد الاخير y^n

(5) اس الحد الاول للمتغير x يتناقص من n الى 0

واس الحد الثاني للمتغير y يزداد من 0 الى n

(6) اذا كان n عدداً زوجياً فان عدد حدود المفكوك هو $n+1$ فردياً

ويكون هناك حد اوسط رتبته $\frac{n}{2}+1$

واذا كان n عدداً فردياً فان عدد حدود المفكوك هو $n+1$ زوجياً

و يكون هناك حدان اوسطان رتبتهما $\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1$

(7) في مفكوك $(x+y)^n$ يكون قانون الحد العام

الحد الذي رتبته (r) هو

$$P_r = C^n_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1}$$

مثال الحد الثالث في مفكوك $(x+y)^5$ هو

$$P_3 = C^5_{3-1} x^{5-3+1} y^{3-1} = C^5_2 x^3 y^2 = 10x^3y^2$$

(8) مفكوك $(x-y)^n$ يكون

$$(x+(-y))^n = C_0^n x^n - C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 - C_3^n x^{n-3} y^3 + \dots + C_n^n (-y)^n$$

نلاحظ (1) يكون الحدود موجب ثم سالب ثم موجب ...

(2) يكون الحد الاخير موجب اذا كان n عدداً زوجياً

ويكون " " سالب " " n عدداً فردياً.

مثال 1

جد مفكوك $(x-y)^5$ ؟

الحل

$$(x-y)^5 = C_0^5 x^5 - C_1^5 x^4 y + C_2^5 x^3 y^2 - C_3^5 x^2 y^3 + C_4^5 x y^4 - C_5^5 y^5$$

$$= x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$$

مثال 2

جد مفكوك $(3a+b)^4$

الحل

$$(3a+b)^4 = C_0^4 (3a)^4 + C_1^4 (3a)^3 b + C_2^4 (3a)^2 b^2 + C_3^4 (3a) b^3 + C_4^4 b^4$$

27

$$= 81a^4 + 4(27)a^3 b + 6(9)a^2 b^2 + 4(3)ab^3 + 1b^4$$

$$= 81a^4 + 108a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$$

مثال 3

اوجد الحد الخامس في المفكوك $(x-3y)^8$

الحل

$$P_r = C_{r-1}^n x^{n-r+1} y^{r-1}$$

$$P_5 = C_4^8 x^4 (-3y)^4$$

$$= \frac{{}^2\cancel{8}\times 7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1} x^4 (81y^4) = 70\times 81 x^4 y^4$$

$$= 5670 x^4 y^4$$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(24) 1

مثال 4 جد الحد الاوسط في مفكوك $\left(\frac{x}{2}-3\right)^8$

الحل

الاس عدد زوجي ⟸ يوجد حد اوسط واحد رتبته $= \frac{n}{2}+1$

$\frac{8}{2}+1 = 4+1 = 5$

$P_r = C^{n}_{r-1} x^{n-r+1} y^{r-1}$ الحد العام

$P_5 = C^8_4 \left(\frac{x}{2}\right)^4 (-3)^4 = \frac{\cancel{8}^{2}\times 7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}\times\frac{x^4}{16}\times 81$

$= \frac{70}{16}\times 81 x^4 = \frac{35}{8}\times 81 x^4 = \frac{2835}{8}x^4$

مثال 5 جد الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3a}\right)^7$

الحل

∵ الاس فردي ⟸ يوجد حدان اوسطان رتبتاهما

$\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$ ، $\frac{n+1}{2}+1 = 4+1 = 5$

∴ الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$P_4 = C^7_3 \left(\frac{3a}{2}\right)^4 \left(\frac{-2}{3a}\right)^3$

$= \frac{7\times\cancel{6}\times 5}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}\times\frac{81a^4}{16}\times\frac{-8}{27a^3} = \frac{35\times \cancel{81}^{3}\times \cancel{-8}\, a^4}{\cancel{16}_{2}\times \cancel{27}_{1}\; a^3} = \frac{-105}{2}a$

$P_5 = C^7_4 \left(\frac{3a}{2}\right)^3 \left(\frac{-2}{3a}\right)^4$

$= \frac{7\times\cancel{6}\times 5\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}\times\frac{\cancel{27}^{1}a^3}{\cancel{8}_{1}}\times\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{81}_{3}a^4} = \frac{70}{3a}$

28

الأستاذ سعد العبودي

مثال 6

ضع المقدار بابسط صورة $(2+a)^4+(2-a)^4$

ثم جد قيمة المقدار $a=\sqrt{3}$

الحل يتكون المقدار $(2+a)^4$ من خمسة حدود ولتكن

$$(2+a)^4 = P_1 + \cancel{P_2} + P_3 + \cancel{P_4} + P_5$$

$$(2-a)^4 = P_1 - \cancel{P_2} + P_3 - \cancel{P_4} + P_5$$

بالجمع

$$= P_1 + P_1 + P_3 + P_3 + P_5 + P_5 = 2P_1 + 2P_3 + 2P_5$$

$$(2+a)^4 + (2-a)^4 = 2(P_1 + P_3 + P_5)$$

نلاحظ ان الناتج يساوي ضعف الحدود الفردية الترتيب في مفكوك $(2+a)^4$

29

$$(2+a)^4 = C_0^4 2^4 + C_1^4 2^3 a + C_2^4 2^2 a^2 + C_3^4 2 a^3 + C_4^4 a^4$$

$$= 2^4 + 4\times 8a + 6\times 4a^2 + 4\times 2a^3 + a^4$$

$$= \underline{16} + 32a + \underline{24a^2} + 8a^3 + \underline{a^4}$$

الحدود الفردية فقط

$$\therefore (2+a)^4 + (2-a)^4 = 2(16 + 24a^2 + a^4)$$

عندما $a=\sqrt{3} \Leftarrow$

$$= 2[16 + 24(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^4]$$

$$= 2[16 + 24(3) + 9]$$

$$= 2[16 + 72 + 9] = 2\times 97 = 194$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

$26/1$ الدور الرابع 2015 مثال (7) اختصر المقدار $(a+\frac{1}{a})^5-(a-\frac{1}{a})^5$

الحل

عدد الحدود = 6 حدود

$$(a+\frac{1}{a})^5 = P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6 = \cancel{P_1}+P_2+\cancel{P_3}+P_4+\cancel{P_5}+P_6$$

$$-(a-\frac{1}{a})^5 = -[P_1-P_2+P_3-P_4+P_5-P_6] = \cancel{-P_1}+P_2\cancel{-P_3}+P_4\cancel{-P_5}+P_6$$

بالجمع

$$= P_2+P_2+P_4+P_4+P_6+P_6 = 2P_2+2P_4+2P_6$$

$$= 2(P_2+P_4+P_6)$$

ضعف الحدود الزوجية الترتيب في مفكوك $(a+\frac{1}{a})^5$

$$(a+\frac{1}{a})^5 = \underbrace{C_0^5 a^5}_{P_1} + \underbrace{C_1^5 a^4(\frac{1}{a})}_{P_2} + \underbrace{C_2^5 a^3(\frac{1}{a})^2}_{P_3} + \underbrace{C_3^5 a^2(\frac{1}{a})^3}_{P_4} + \underbrace{C_4^5 a(\frac{1}{a})^4}_{P_5} + \underbrace{C_5^5(\frac{1}{a})^5}_{P_6}$$

$$= 2\left[5a^4(\frac{1}{a}) + 10a^2(\frac{1}{a})^3 + \frac{1}{a^5}\right]$$

$$= 10a^3 + \frac{20}{a} + \frac{2}{a^5}$$

مهم

مثال (8) جد الحد الذي يحوي (a^8) في مفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله ؟

الحل نفرض ان رتبة الحد الذي يحوي a^8 في مفكوك $(3+a^2)^8$ هو r

$$P_r = C_{r-1}^{n}(3)^{n-r+1}(a^2)^{r-1} = C_{r-1}^{8}(3)^{8-r+1}(a^2)^{r-1}$$

$$= C_{r-1}^{8}(3)^{9-r}a^{2r-2} \rightarrow a^8 = a^{2r-2} \rightarrow 2r-2=8$$

$$\therefore 2r=10 \rightarrow r=5$$ رتبة الحد الذي يحوي a^8 هو خامس

$$\therefore P_5 = C_{5-1}^{8}(3)^{9-5}(a^2)^{5-1} = C_4^8(3)^4(a^2)^4$$

$$= \frac{\cancel{8}^{2}\times 7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}\times 81\times a^8 = 5670\,a^8$$ قيمة الحد

معامل a^8 هو $=5670$

27/1

مثال 9

جد الحد الخالي من (x) في مفكوك $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{15}$

الحل

نفرض ان رتبة الحد الخالي من x [اي يحوي على x^0] هي (r) فيكون

$$P_r = C^{n}_{r-1}(x^2)^{n-r+1}\left(\frac{-1}{x}\right)^{r-1}$$

$$= C^{15}_{r-1}(x^2)^{15-r+1}(-1)^{r-1}(x^{-1})^{r-1}$$

$$\frac{-1}{x} = -1\,x^{-1}$$

$$= C^{15}_{r-1}\,x^{32-2r}(-1)^{r-1}(x)^{-r+1}$$

$$= C^{15}_{r-1}\,x^{33-3r}(-1)^{r-1}$$

$$= x^{32-2r} \times x^{-r+1} = x^{32-2r-r+1} = x^{33-3r}$$

$$\therefore x^0 = x^{33-3r} \longrightarrow 33-3r=0 \longrightarrow 33=3r \rightarrow r=11$$

الحد الخالي من (x) هو الحد الذي رتبته (11) فيكون

$$P_{11} = C^{15}_{10}(x^2)^{15-11+1}(-1)^{11-1}(x)^{-11+1}$$

31 $$= C^{15}_{10}(x^2)^5(-1)^{10}(x)^{-10}$$

$$x^{10}(1)(x)^{-10} = x^{10-10} = x^0 = 1$$

$$= C^{15}_{10} = C^{15}_{5}$$

$$= \frac{\cancel{15}\times 1\cancel{4}^{7}\times 13+1\cancel{2}^{3}+11}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1} = 3003$$

قيمة الحد الخالي من x هو 3003

مثال 10

جد قيمة $(101)^3$

الحل

$$(101)^3 = (1+100)^3 = C^3_0(1)^3 + C^3_1(1)^2(100) + C^3_2(1)(100)^2 + C^3_3(100)^3$$

$$= 1+3(100)+3(10000)+1000000$$

$$= 1+300+30000+1000000$$

$$= 1030301$$

الأستاذ سعد الحيدري
إعدادية الجزيرة

(28)/1

تمارين (1-4)

1 جد مفكوك كل مما يأتي

(a) $(3a-b)^4$

الحل

$$(3a-b)^4 = C_0^4(3a)^4 - C_1^4(3a)^3(b) + C_2^4(3a)^2(b)^2 - C_3^4(3a)b^3 + C_4^4(b)^4$$

$$= 81a^4 - 4(27)a^3b + 6(9)a^2b^2 - 4(3a)b^3 + b^4$$

$$= 81a^4 - 108a^3b + 54a^2b^2 - 12ab^3 + b^4$$

(b) $(3x^2+2y)^3$

عدد الحدود = 4

الحل

$$(3x^2+2y)^3 = C_0^3(3x^2)^3 + C_1^3(3x^2)^2(2y) + C_2^3(3x^2)(2y)^2 + C_3^3(2y)^3$$

$$= 27x^6 + 3(9x^4)(2y) + 3(3x^2)(4y^2) + (8y^3)$$

$$= 27x^6 + 54x^4y + 36x^2y^2 + 8y^3$$

(c) $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^6$

عدد الحدود = 7

$$= (2x)^6 - C_1^6(2x)^5\left(\frac{1}{2x}\right) + C_2^6(2x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - C_3^6(2x)^3\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + C_4^6(2x)^2\left(\frac{1}{2x}\right)^4 - C_5^6(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)^5 + C_6^6\left(\frac{1}{2x}\right)^6$$

$$= 64x^6 - 6(32)\frac{x^5}{2x} + 15(16)x^4\frac{1}{4x^2} - 20(8)x^3\frac{1}{8x^3} + 15(4)x^2\frac{1}{16x^4} - 6(2x)\frac{1}{32x^5} + \frac{1}{64x^6}$$

$$= 64x^6 - 96x^4 + 60x^2 - 20 + \frac{15}{4x^2} - \frac{3}{8x^4} + \frac{1}{64x^6}$$

2 جد الحد الثالث في مفكوك $(x-3y^2)^7$

الحل

$$P_r = C_{r-1}^n\, x^{n-r+1}(-3y^2)^{r-1}$$

$$P_3 = C_2^7\, x^{7-3+1}(-3y^2)^{3-1} = C_2^7\, x^5(-3y^2)^2 = 21x^5(9)y^4$$

$$= 189x^5y^4$$

(29) / 1

س3 جد الحد السادس في مفكوك $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)^8$

الحل

$$P_r = C^n_{r-1}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-r+1}\left(-\frac{x}{3}\right)^{r-1}$$

$$P_6 = C^8_5\left(\frac{x^2}{2}\right)^{8-6+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{6-1} = C^8_5\left(\frac{x^2}{2}\right)^3\left(\frac{x}{3}\right)^5$$

$$= C^8_3\,\frac{x^6}{8}\times\frac{x^5}{243}$$

فائدة التصغير $C^8_5 = C^8_3$

$\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 = \frac{(x^2)^3}{2^3} = \frac{x^6}{8}$

$$= \overset{7}{\cancel{56}}\times\frac{x^{11}}{\cancel{8}\times 243} = \frac{7}{243}x^{11}$$

س4 جد الحد الاوسط في مفكوك $\left(a-\frac{2}{a}\right)^{12}$

الحل

∵ الاس زوجيا ← يوجد حد وسط واحد رتبته $\frac{n}{2}+1$

$$= \frac{12}{2}+1 = 6+1 = 7$$

$$P_r = C^n_{r-1}\,X^{n-r+1}\,Y^{r-1}$$ الحد العام

الحد الاوسط هو الحد السابع

$$P_7 = C^{12}_6\,X^{12-7+1}\,Y^{7-1} = C^{12}_6\,X^6\,Y^6$$

$$= C^{12}_6 (a)^6\left(\frac{2}{a}\right)^6 = \frac{\cancel{12}\times 11\times \overset{2}{\cancel{10}}\times \overset{3}{\cancel{9}}\times \overset{4}{\cancel{8}}\times 7}{\cancel{6}\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}\,\cancel{a^6}\times\frac{2^6}{\cancel{a^6}}$$

$$= 59136$$

30/1

س5 جد الحدين الأوسطين في مفكوك $(2a-1)^7$

الحل الحدان رتبتاهما $\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$

$\frac{n+1}{2}+1=4+1=5$

∴ الحدان الأوسطان هما الرابع والخامس

$P_4=C^7_3(2a)^4(-1)^3$

$=35(16a^4)(-1)=-560a^4$

$P_5=C^7_4(2a)^3(-1)^4=35(8a^3)(1)=280a^3$

س6 جد الحد الذي يحوي على x^4 في مفكوك $(1+x^2)^6$.
ثم جد معامله؟

الحل نفرض ان رتبة الحد الذي يحوي x^4 في مفكوك $(1+x^2)^6$ هي (r) 34

$P_r=C^6_{r-1}(1)^{6-r+1}(x^2)^{r-1}$

$=C^6_{r-1}(1)^{7-r}(x)^{2r-2}\rightarrow x^4=x^{2r-2}\rightarrow 4=2r-2$

$\therefore 2r=4+2\rightarrow 2r=6\rightarrow r=3$

رتبة الحد الذي يحوي x^4 هو الثالث

$P_3=C^6_2(1)^{6-3+1}(x^2)^{3-1}$

$=C^6_2(1)^4(x^2)^2=\frac{6\times5}{2\times1}x^4=15x^4$ الحد الذي يحوي x^4

معامله هو 15

القراءة الجد التوأم ... النجاح

الأستاذ سعد السعدي
إعدادية الجزيرة

س7

جد معامل x^2 في مفكوك $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^9$

الجواب يجب اولاً ان نجد رتبة الحد الذي يحوي x^2

نفرض رتبة الحد الذي يحوي x^2 هو r فيكون

$$P_r=C^9_{r-1}(x^3)^{9-r+1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{r-1}$$

$$=C^9_{r-1}(x)^{3(10-r)}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{r-1}=C^9_{r-1}(x)^{30-3r}(2)^{r-1}\left[(x)^{-2}\right]^{r-1}$$

$$=C^9_{r-1}(x)^{30-3r}(2)^{r-1}(x)^{-2r+2}$$

$$=C^9_{r-1}x^{30-3r-2r+2}(2)^{r-1}=C^9_{r-1}\underline{x}^{32-5r}(2)^{r-1}$$

$$\therefore x^2=x^{32-5r}\longrightarrow 2=32-5r\longrightarrow 5r=32-2\longrightarrow 5r=30$$

35 $\therefore r=6 \longrightarrow$ رتبة الحد الذي يحوي x^2 هو السادسة

$$P_6=C^9_5\,x^{32-30}(2)^5=\frac{9\times\overset{2}{\cancel{8}}\times7\times\cancel{6}\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}x^2(32)=\underline{4032x^2}$$

معامل x^2 هو 4032

س8 جد الحد الخالي من (x) في مفكوك $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^{10}$

ج) الحد الخالي من x هو الحد الذي يحوي x^0

نفرض ان رتبة الحد الخالي من x هي r فيكون

$$P_r=C^n_{r-1}(x^2)^{n-r+1}\left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$

$$=C^{10}_{r-1}(x^2)^{11-r}(2)^{r-1}(x^{-3})^{r-1}$$

$x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ ثم الاس يتوزع

$$=C^{10}_{r-1}(x)^{22-2r}(2)^{r-1}(x)^{-3r+3}$$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

32/1

$$= C^{10}_{r-1}\ x^{22-2r-3r+3}\ (2)^{r-1}$$

عند الضرب نجمع الاسس

$$= C^{10}_{r-1}\ x^{25-5r}\ (2)^{r-1}$$

$$\therefore x^{0} = x^{25-5r} \longrightarrow 25-5r=0 \longrightarrow 5r=25 \longrightarrow r=5$$

∴ الحد الخالي من x هو الحد الذي رتبته $5 \Longleftarrow$

$$P_5 = C^{10}_{4}\ x^{25-25}\ (2)^4 = C^{10}_{4}\ x^{0}(16) = 16\ C^{10}_{4}$$

$$= 16 \times \frac{10\times \cancel{9}^{3} \times \cancel{8} \times 7}{\cancel{4}\times \cancel{3}_{1} \times \cancel{2} \times 1} = 16\times 210 = 3360$$

قيمة الحد الخالي من x

س 2 جد قيمة $(99)^4$ (باستخدام نظرية ذي الحدين)

الحل

$$(99)^4 = (100-1)^4$$

$$= C^4_0(100)^4 - C^4_1(100)^3(1) + C^4_2(100)^2(1)^2$$

$$- C^4_3(100)(1)^3 + C^4_4(1)^4$$

$$= (100)^4 - 4(100)^3 + 6(100)^2 - 4(100) + 1$$

$$= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1$$

$$= 96059601$$

36

33/1

س10 جد قيمة $(102)^4-(98)^4$

الحل

الحل

$$(102)^4-(98)^4=(100+2)^4-(100-2)^4$$

يكون الناتج = ضعف الحدود الزوجية الترتيب في مفكوك $(100+2)^4$.

عدد الحدود = 5

$$(100+2)^4=\underbrace{C_0^4(100)^4}_{P_1}+\underbrace{C_1^4(100)^3(2)}_{P_2}+\underbrace{C_2^4(100)^2(2)^2}_{P_3}+\underbrace{C_3^4(100)(2)^3}_{P_4}+\underbrace{C_4^4(2)^4}_{P_5}$$

$$(102)^4-(98)^4=2\left[C_1^4(100)^3(2)+C_3^4(100)(2)^3\right]$$

$$=2\left[8(1000000)+32(100)\right]$$

$$=2\left[8000000+3200\right]=2\left[8003200\right]$$

$$=16006400$$

37

س11 جد قيمة $(2+\sqrt{3})^7+(2-\sqrt{3})^7$

الحل

الحل ملاحظة كل حدين بينهما − يكون الناتج ضعف الحدود الزوجية الترتيب كما في س10

كل حدين بينهما + يكون الناتج ضعف الحدود الفردية الترتيب كما في هذا السؤال

∴ يكون الناتج ضعف الحدود الفردية الترتيب في مفكوك $(2+\sqrt{3})^7$

$$(2+\sqrt{3})^7=C_0^7(2)^7+C_1^7(2)^6(\sqrt{3})+C_2^7(2)^5(\sqrt{3})^2+C_3^7(2)^4(\sqrt{3})^3+C_4^7(2)^3(\sqrt{3})^4+C_5^7(2)^2(\sqrt{3})^5+C_6^7(2)(\sqrt{3})^6+C_7^7(\sqrt{3})^7$$

$$(2+\sqrt{3})^7+(2-\sqrt{3})^7=2\left[(2)^7+C_2^7(32)(3)+C_4^7(8)(9)+C_6^7(2)(27)\right]$$

$$=2\left[128+2016+2520+378\right]=2\left[5042\right]$$

$$=10184$$

تم بحمد الله تعالى ويلحق الفصل 2

الأستاذ سعد الزبيدي

الرياضيات

السادس الادبي

الفصل الثاني

الغايات Limits

38

الأسئلة الوزارية

اعداد الاستاذ

سعد العبودي

تطلب حصراً من

مكتبة الفتح الجديد

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل 2

الغايات Limits

والاستمرارية And Continuity

الغايات Limits

يرمز لها بالرمز $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a

الغاية بالمفهوم المبسط تعني التعويض عن قيمة المجهول

ex(1) $\lim_{x \to 0} x+1 = 0+1 = 1$

$\lim_{x \to 1} x+1 = 1+1 = 2$

$\lim_{x \to -2} x+1 = -2+1 = -1$

39

* نلاحظ ان نتيجة الغاية = عدد

بعض المبرهنات في الغايات

(1) غاية الدالة إن وجدت فهي وحيدة

اي اذا كان $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$

فان $L_1 = L_2$

ملاحظة

$x \to a^+$ تعني ان x يقترب من a من جهة اليمين

$x \to a^-$ تعني ان x تقترب من a من جهة اليسار

الأستاذ محمد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(أ) لايسمح بتكرار الحرف

عدد اختيار الحرف الاول = 6
عدد اختيار الحرف الثاني = 5
عدد اختيار الحرف الثالث = 4
عدد اختيار الحرف الرابع = 3

∴ عدد الكلمات =
$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ كلمة

(ب) يسمح بتكرار الحرف

عدد اختيار الحرف الاول = 6
عدد اختيار الحرف الثاني = 6
عدد اختيار الحرف الثالث = 6
عدد اختيار الحرف الرابع = 6

∴ عدد الكلمات =
$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

شرح السؤال السابق:

في حالة عدم السماح بتكرار الحرف فانه عندما نختار حرف من مجموعة الحروف الستة فانه لا يكرر لذلك ينقص من العدد الكلي 1 وهكذا في حالة الاختيار الثالث ينقص 1 في كل عملية.
اما في حالة السماح بتكرار الحرف فانه يعاد الحرف الى نفس المجموعة لذلك يبقى عدد الحروف 6 في كل عملية.

مثال 4 بكم طريقة يمكن تكوين عدد رمزه مكون من اربعة مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1,2,4,6,7,8,9\}$ عندما
(أ) التكرار مسموح (ب) التكرار غير مسموح

الحل

(أ) التكرار مسموح

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 7
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7
عدد طرق اختيار رقم المئات = 7
عدد طرق اختيار رقم الالوف = 7
عدد الطرق الكلي = $7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ب) التكرار غير مسموح

عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 7
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6
عدد طرق اختيار رقم المئات = 5
عدد طرق اختيار رقم الالوف = 4
∴ عدد الطرق الكلي

(2) غاية العدد = العدد نفسه

$\lim_{x\to a} c = c$ حيث $c \in R$

امثلة

(a) $\lim_{x\to 1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (b) $\lim_{x\to 0} 3 = 3$

(c) $\lim_{x\to -1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (d) $\lim_{x\to 0} 3a+b = 3a+b$

(3) $\lim_{x\to a} x = a$ امثلة

(a) $\lim_{x\to -2} x = -2$ (b) $\lim_{x\to \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$

(c) $\lim_{x\to \frac{1}{4}} x = \frac{1}{4}$

(4) الغاية تتوزع على الجمع والطرح 40

إي اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين فان

$$\lim_{x\to a} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x)$$

امثلة

(a) $\lim_{x\to 1} (x+4) = \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 4$

$= 1 + 4 = 5$

(b) $\lim_{x\to -5} (x-3) = \lim_{x\to -5} x - \lim_{x\to -5} 3$

$= -5 - 3 = -8$

(5) غاية (عدد × دالة) = العدد غـــاية الدالة

اي ان العدد يخرج من غاية الدالة

$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$ ، c عدد ثابت

امثلة

(a) $\lim_{x\to 2} 4x = 4 \lim_{x\to 2} x = 4(2) = 8$

(b) $\lim_{x\to 0} -3x = -3\lim_{x\to 0} x = -3(0) = 0$

(d) $\lim_{x\to -2} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\lim_{x\to -2} x = \frac{1}{2}(-2) = -1$

(6) الغاية تتوزع على الضرب

اي اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين فان

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

امثلة

(a) $\lim_{x\to 1} x(x+2) = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1}(x+2)$

$= \lim_{x\to 1} x\left[\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2\right]$

$= 1\,[1+2] = 3$

(b) $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$ (41)

نستنتج $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ ، n عدد صحيح موجب

(c) $\lim_{x\to -3} x^3 = (-3)^3 = -27$

(7) الغاية تتوزع على القسمة

اي اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين وان

$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

امثلة

(a) $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1} = \frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)} = \frac{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1}$

$= \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$

(b) $\lim_{x\to 2}\frac{3}{x+4}=\frac{\lim_{x\to 2}3}{\lim_{x\to 2}x+4}=\frac{3}{\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4}=\frac{3}{2+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(8) الغاية تدخل في الجذور

اي اذا كانت $f(x)$ دالة وان $\lim_{x\to a}f(x)$ موجودة فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}\quad , n \text{ عدد صحيح} , n>1$$

مثال

(a) Find $\lim_{x\to 1}\sqrt{4x+5}$, $x\geq\frac{-5}{4}$

الحل

$$=\sqrt{\lim_{x\to 1}(4x+5)}=\sqrt{\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}5}$$

$$=\sqrt{4(1)+5}=\sqrt{9}=3$$

(b) Find $\lim_{x\to -2}f(x)$, $f(x)=\sqrt{x+2}$, $x\geq -2$

الحل

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\sqrt{x+2}=\sqrt{\lim_{x\to -2}(x+2)}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to -2}x+\lim_{x\to -2}2}=\sqrt{-2+2}=\sqrt{0}=0$$

(c) Find $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}-2$? $x\geq 1$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}-2=\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}-\lim_{x\to 2}2$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}-2$$

$$=\sqrt{(2)^2-1}-2=\sqrt{3}-2$$

عكن حل الاسئلة السابقة بصورة مباشرة مثل

$$\lim_{x\to 0} x^2+1 = (0)^2+1 = 1$$

ملاحظات مهمة

لحل جميع مسائل الغايات

(1) اذا كانت الدالة كثيرة الحدود (لاكسرية) مثل $f(x)=x^2+2x-1$

أو كسرية $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ وكان (المقام $\neq$ صفراً عند التعويض) ←

نعوض عن قيمة المجهول مباشرةً

الامثلة جد الغاية في كل مما ياتي

(1) $\lim_{x\to 0} x^2+2x-1$

الحل

$$\lim_{x\to 0} x^2+2x-1 = (0)^2-2(0)-1 = -1$$

(2) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1}$

المقام $x-1$ يساوي

$2-1=1\neq 0$

نعوض مباشرةً لان المقام $\neq$ صفر

الحل

$$= \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

(3) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-2} \quad , x \geq 2$

الحل

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x-2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

(4) $\lim_{x\to -3} (x^3+2x)$

الحل

$$\lim_{x\to -3} (x^3+2x) = (-3)^3+2(-3)$$

$$= -27-6$$

$$= -33$$

$(-a)^{\text{فردي}} = -(a)^{\text{فردي}}$

$(-a)^{\text{زوجي}} = +(a)^{\text{زوجي}}$

43

الاستاذ ... العبودي
... الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣٦٨٦

ملاحظة

(2) اذا كانت الدالة كسرية $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ وكان المقام = صفر فيجب

(1) نحلل (البسط أو المقام أو كليهما) باحدى طرق التحليل

(2) نختصر البسط مع المقام (اذا لا يوجد اختصار نحلل ثانية)

(3) نعوض

لاحظ المثال التالي

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

$x+1$

$-1+1=0$

$\therefore$ المقام = صفر

الحل

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}$$

فرق بين مربعين (نحلل)

$$=\lim_{x\to -1} x-1 = -1-1=-2$$

مراجعة طرق التحليل

(1) اخراج العامل المشترك قبل اي عملية تحليل اخرى (إن وجد)

ex/ $x^3-x=x(x^2-1)$

$3x^2-12=3(x^2-4)$

$2x^4-16x=2x(x^3-8)$

(2) الفرق بين مربعين

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

$x^2-16=(x-4)(x+4)$

$x^2-5=(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

$x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

$3x^2-27=3(x^2-9)=3(x-3)(x+3)$ عامل مشترك ثم فرق بين مربعين

(3) مجموع مربعين (لا يتحلل حسب حدود منهج السادس الاعدادي)

ex x^2+4 ، x^4+16 ، $x+1$ ، $2x^2+4$

(4) فرق ومجموع مكعبين

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

مكعب الاول

نفس الاشارة

مكعب الثاني

مربع الاول

عكس الاشارة

الاول × الثاني

دائماً +

مربع الثاني

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

القوس الكبير لا يتحلل حسب حدود المنهج

ex
$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$
$$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$$
45 $$x^3-64=(x-4)(x^2+4x+16)$$
$$x^3+125=(x+5)(x^2-5x+25)$$
$$2x^3+16=2(x^3+8)=2(x+2)(x^2-2x+4)$$ عامل مشترك ثم مجموع مكعبين
$$x^4-27x=x(x^3-27)=x(x-3)(x^2+3x+9)$$

(4) التجربة (3 حدود)

ex x^2-5x+6

$(x-3)(x-2)$

$-3x$

$-2x$

$-5x$

للتحقق من الحد الوسط نضرب القريب × القريب والبعيد × البعيد ثم نجمع

(5) مربع كامل (3 حدود)

ex x^2-4x+4

$(x-2)^2$

جذر x^2

جذر 4

الأستاذ سعد العبّودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

امثلة جد الغاية لكل من

ex/ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

المقام = صفر
$3-3=0$
لذلك نحلل

الحل

$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$

ex/ $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$

x^2-4
$=(2)^2-4 = 4-4$
$=0$

الحل

$\lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$

فرق بين مكعبين

فرق بين مربعين

$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}$

$= \frac{4+4+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

ex/ $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4x-12}{x+2}$

$x+2$
$-2+2=0$

الحل

$\lim_{x\to -2} \frac{(x-6)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = \lim_{x\to -2} (x-6)$

$= -2-6 = -8$

اسئلة الواجب البيتي

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$

(2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x-5}$

(4) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4+8x}{x+2}$

(5) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-54}{x-3}$

(6) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-2x-4}{(x+1)}$

(7) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

46

الاستاذ ... العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٩

ملاحظة
(3) اذا كانت الدالة كسرية $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$ وكان المقام = صفر و(البسط أو المقام) لا يتحلل [فيها جذر] ⟸ نضرب في مرافق البسط أو مرافق المقام . ثم نبسط ونختصر ونعوض

ex $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $x \geq -1$

المقام $x-3$
$3-3=0$
البسط لا يتحلل ⟵
نضرب × مرافق البسط

الجواب

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$

$(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)$
فرق بين مربعين $(x+1)-4$
$x+1-4 = x-3$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x+1-4)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim \sqrt{x+1}+2}$

$= \frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

ملاحظة
((4)) اذا كانت الدالة معرفة بتعريفين مثل $f(x) = \begin{cases} x \\ x^2+1 \end{cases}$ فلايجاد الغاية نتبع

(1) نجد الغاية من اليمين تقابل أكبر من $x > a$
(2) = = = اليسار = أصغر من $x < a$

ملاحظة

اذا الغاية من اليمين = الغاية من اليسار ⟵ للدالة غاية أو الغاية موجودة

اذا الغاية من اليمين ≠ الغاية من اليسار ⟵ ليس للدالة غاية أو الغاية غير موجودة

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

مثال 14 لتكن $f(x)=\begin{cases} 1-x & x\leq 2 \\ x+1 & x>2 \end{cases}$ هل للدالة $f(x)$ غاية عند 2

الحل

الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+1)$$
$$=2+1=3=L_1$$

الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(1-x)$$
$$=\lim_{x\to 2^-} 1-\lim_{x\to 2^-} x = 1-2=-1=L_2$$

$\because L_1\neq L_2 \leftarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة

مثال 15 لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\leq 1 \\ 2x+a & x>1 \end{cases}$ وأن $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة جد قيمة a ؟ 48

الحل

$\because \lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة $\leftarrow$ الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+}(2x+a)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2)$$
$$2(1)+a=(1)^2+2$$
$$2+a=1+2 \rightarrow 2+a=3 \rightarrow a=3-2=1$$

التعب الحب النجاح الكلية

مثال 16 لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2+a & x>1 \\ b-2x & x\leq 1 \end{cases}$ وكانت $\lim f(x)$ موجودة

وان $\lim_{x\to -1} f(x)=5$ جد قيمتي $a,b\in R$

الجواب

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

نلاحظ ان -1 يقع ضمن $x \le 1$ لذلك نختار $f(x) = b - 2x$

$\because \lim_{x \to -1} f(x) = 5$

$\therefore \lim_{x \to -1} (b - 2x) = 5$

$\therefore b - 2(-1) = 5 \to b + 2 = 5 \to b = 3$

$\because \lim f(x) =$ موجودة ← الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + a) = \lim_{x \to 1} (b - 2x)$$

$$(1)^2 + a = 3 - 2(1) \to 1 + a = 3 - 2 \to 1 + a = 1$$

$\therefore a = 0$

مثال 17

اذا كانت $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = 2a + 3$ جد قيمة a

الحل

$$\frac{\lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 3x - \lim_{x \to 1} 1}{\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 2} = 2a + 3$$

$$\frac{(1)^2 + 3(1) - 1}{1 + 2} = \frac{1 + 3 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow 2a + 3 = 1$$

$$2a = 1 - 3 \to 2a = -2 \to a = -1$$

وما نيلُ النجاحِ بالتمني ولكنْ بالجدِ والاجتهاد

قليلٌ دائمٌ خيرٌ من كثيرٍ منقطعٍ

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

تمارين (1-2)

(1) جد قيمة كل مما يأتي

$$(1)\ \lim_{x\to -1}(x^3+2x+3)$$

الحل

$$= \lim_{x\to -1} x^3 + \lim_{x\to -1} 2x + \lim_{x\to -1} 3$$

$$= (-1)^3 + 2(-1) + 3$$

$$= -1-2+3 = -3+3 = 0$$

الدالة حدودية لذلك حسب ملاحظة (1) نعوض مباشرة

$$(2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1}{x+1}$$

الحل

∵ المقام $x+1 = 0+1 = 1 \neq 0$

لذلك نعوض مباشرة حسب ملاحظة (1)

$$\frac{\lim_{x\to 0} x^4 + \lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 1} = \frac{(0)^4+1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(3)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-x-6}$$

المقام $x^2-x-6 = (-2)^2-(-2)-6$

$= 4+2-6 = 4-4 = 0$

المقام = صفر ← ملاحظة 2

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-3)\cancel{(x+2)}}$$

عامل مشترك

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x}{x-3} = \frac{\lim x}{\lim_{x\to -2}(x) - \lim_{x\to -2} 3}$$

تجربة

$$= \frac{-2}{-2-3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

الاستاذ سعد العبودي
إعدادية العزيزية
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

$$(4)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$$

المقام $x-1$
$= 1-1 = 0$
تحلل + تختصر + نعوض

الحل

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}$$

فرق بين مربعين

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{x-1}}$$

نحلل مرة أخرى لعدم وجود اختصار البسط والمقام

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{1}=\lim_{x\to1}(x+1)\lim_{x\to1}(x^2+1)$$

$$=\left[\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}1\right]\left[\lim_{x\to1}x^2+\lim_{x\to1}1\right]$$

$$=\left[1+1\right]\left[(1)^2+1\right]=\left[2\right]\left[2\right]=4$$

(5) $$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^2+2x-15}$$

$x^2+2x-15$
$(3)^2+2(3)-15=9+6-15$
المقام $=0$ نطبق ملاحظة 2

$$=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{(x+5)\cancel{(x-3)}}$$

فرق بين مكعبين

تجربة

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+3x+9}{x+5}=\frac{\lim_{x\to3}x^2+\lim_{x\to3}3x+\lim_{x\to3}9}{\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}5}$$

51

$$=\frac{(3)^2+3(3)+9}{3+5}=\frac{9+9+9}{8}=\frac{27}{8}$$

(6) $$\lim_{x\to\sqrt2}\frac{x^2-2}{x-\sqrt2}$$

المقام $=x-\sqrt2$
$\sqrt2-\sqrt2=0$
نطبق ملاحظة 2

الحل

$$\lim_{x\to\sqrt2}\frac{\cancel{(x-\sqrt2)}(x+\sqrt2)}{\cancel{x-\sqrt2}}$$

فرق بين مربعين

$$=\lim_{x\to\sqrt2}(x+\sqrt2)=\sqrt2+\sqrt2=2\sqrt2$$

(7) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}$$

المقام $3x^2-3$
$=3(1)^2-3=3-3=0$
ملاحظة 2

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x^2+7x-8)}{3(x^2-1)}$$

عامل مشترك

عامل مشترك

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x+8)\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x+8)}{3(x+1)}$$

الأستاذ سعد العبيدي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣...

(14)/2

$$= \frac{1(1+8)}{3(1+1)} = \frac{1(9)}{3(2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

(8) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^4-16}$

المقام (x^4-16)
$(-2)^4-16$
$16-16=0$

الحل

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}$$

فرق بين مكعبين

فرق بين مربعين

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(\cancel{x+2})(x^2-2x+4)}{(x-2)(\cancel{x+2})(x^2+4)}$$

تحلل مرةً اخرى لعدم وجود اختصار في البسط والمقام

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)}$$

$$= \frac{4+4+4}{(-4)(8)} = \frac{12}{-32} = \frac{-3}{8}$$

(9) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} =$

المقام $\sqrt{x}-1$
$= \sqrt{1}-1 = 1-1=0$
تحلل + تختصر + نعوض

الحل

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

لعدم وجود اختصار ← تحلل مرةً اخرى

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1)(x+1) = (\sqrt{1}+1)(1+1)$$

$$=(2)(2)$$

$$=4$$

الاستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(10) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3}$

المقام $\sqrt{3x}-3$
$\sqrt{3}-3\neq 0 \Leftarrow$ نعوض

الحل

$$\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-9)}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{3x}-3)}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}9}{\sqrt{\lim_{x\to 1}3x}-\lim 3}=\frac{(1)^2-9}{\sqrt{3(1)}-3}$$

$$=\frac{1-9}{\sqrt{3}-3}=\frac{-8}{\sqrt{3}-3}$$

(11) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+17}{\sqrt{x+10}+3}$

المقام $\sqrt{x+10}+3$
$=\sqrt{-1+10}+3$
$\sqrt{9}+3=3+3\neq 0$
ملاحظة 1

الحل

$$=\frac{\lim_{x\to -1}(x^2+17)}{\lim_{x\to -1}(\sqrt{x+10}+3)}$$

الأستاذ [illegible] العبّودي
إعدادية [illegible]
٠٧٩٠٠١٠٣١٨٦

53

$$=\frac{\lim_{x\to -1}x^2+\lim_{x\to -1}17}{\sqrt{\lim_{x\to -1}(x+10)}+\lim_{x\to -1}3}=\frac{(-1)^2+17}{\sqrt{-1+10}+3}=\frac{18}{6}=3$$

س2 اذا كانت $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x+6}{x+3}=3a-4$ جد قيمة a

حيث $a\in R$

الحل

المقام $x+3=4+3=7\neq 0$
لذلك نطبق ملاحظة 1

$$\frac{\lim_{x\to 4}(x^2-2x+6)}{\lim_{x\to 4}(x+3)}=3a-4$$

$$\frac{(4)^2-2(4)+6}{4+3}=3a-4\rightarrow\frac{16-8+6}{7}=3a-4$$

$$\frac{14}{7}=3a-4\rightarrow 2=3a-4\rightarrow 2+4=3a\rightarrow 6=3a$$

$$a=2$$

س3 اذا كانت $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=8$ جد قيمة a , $a\in R$

الحل

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=8$$

المقام $x-a$
$= a-a = 0$
∴ نحلل ثم نختصر ثم نعوض

$$\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}}=8$$

$$\lim_{x\to a}(x+a)=8 \rightarrow a+a=8 \rightarrow 2a=8$$

$a=4$

س4 اذا كانت $f(x)=ax^2+bx$ وكانت $\lim_{x\to 1}f(x)=5$

$\lim_{x\to -2}f(x)=8$ جد قيمتي a,b ؟

54

الاستاذ ... الجبوري
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣٢٨٦

الحل

$$\because \lim_{x\to 1}f(x)=5 \rightarrow \lim_{x\to 1}(ax^2+bx)=5$$

$$a(1)^2+b(1)=5 \rightarrow a+b=5$$

$\boxed{b=5-a}$ ...1

$$\because \lim_{x\to -2}f(x)=8 \rightarrow \lim_{x\to -2}(ax^2+bx)=8$$

$$a(-2)^2+b(-2)=8$$

$\boxed{4a-2b=8}$ ...(2)

$4a-2b=8$ ← نعوض معادلة (1) في (2)

$$4a-2(5-a)=8 \rightarrow 4a-10+2a=8 \rightarrow 6a=8+10$$

$$6a=18 \rightarrow a=\frac{18}{6}=3$$

$b=5-a=5-3=2$ ← نعوضها في (1)

$a=3$ $b=2$

(5) لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x>2 \\ 2-2x & x\leq 2 \end{cases}$$

(a) هل للدالة f غاية عند 2 ؟ بين ذلك ؟

(b) جد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الجواب

(a) الغاية من اليمين

$\lim_{x\to 2} f(x)$

تقابل اكبر من $[x>2]$

$= \lim_{x\to 2}(x^2-3) = (2)^2-3 = 4-3 = 1$

الغاية من اليسار

$\lim_{x\to 2}(2-2x) = 2-2(2)$

$= 2-4 = -2$

تقابل اصغر من $[x\leq 2]$

الأستاذ ... العبود
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

55

$\because$ الغاية من اليمين $\neq$ الغاية من اليسار

$\therefore$ لا توجد غاية للدالة عند 2

(b) لايجاد $\lim_{x\to 1} f(x)$

هنا مفتاح الحل . نلاحظ ان العدد 1 يقع ضمن الدالة $x\leq 2$ لذلك نختار $f(x)=2-2x$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2-2x) = \lim_{x\to 1} 2 - \lim_{x\to 1} 2x$

$= 2-2(1) = 2-2 = 0$

---

(6) لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$$

هل للدالة f غاية عندما $x\to 0$ ؟ بين ذلك ؟

الجواب نلاحظ ان $x\to 0$ يقع ضمن الفترة $x<2$ لذلك

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(2-x) = \lim_{x\to 0} 2 - \lim_{x\to 0} x = 2-0$

$= 2$

(7) لتكن $f(x)=\begin{cases} a+2x & x\le -1 \\ 3-x^2 & x>-1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)$ موجودة. جد قيمة a حيث $a\in R$.

الحل

$\because$ الغاية موجودة ← الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\therefore \lim_{x\to -1} 3-x^2 = \lim_{x\to -1} a+2x$

الغاية من اليمين تقابل الأكبر

الغاية من اليسار تقابل الأصغر

$3-(-1)^2 = a+2(-1)$

$3-1 = a-2 \rightarrow 2 = a-2 \rightarrow a = 2+2 = 4$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(8) لتكن $f(x)=\begin{cases} 3x+a & x\ge 2 \\ x^2-b & x<2 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة وان $f(\sqrt{2})=5$ جد قيمة $a,b\in R$?

الجواب

$\because$ $\sqrt{2}$ يقع ضمن المجال $x<2$ ⇐

$f(\sqrt{2})=5 \rightarrow \lim_{x\to\sqrt{2}} (x^2-b)=5$

$\rightarrow (\sqrt{2})^2-b=5 \rightarrow 2-b=5 \rightarrow b=-3$

⇐ تصبح الدالة

$\therefore f(x)=\begin{cases} 3x+a & x\ge 2 \\ x^2+3 & x<2 \end{cases}$

$\because$ الغاية موجودة ← الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\therefore \lim_{x\to 2} 3x+a = \lim_{x\to 2} x^2+3$

$3(2)+a = (2)^2+3 \rightarrow 6+a = 7 \rightarrow a=1$

استمرارية الدالة عند نقطة

Continuity of function at point

تعريف

الدالة f مستمرة عند النقطة $x=a$ اذا تحققت الشروط الثلاث

(1) $f(a)$ حقيقية وموجودة — الدالة حقيقية وموجودة

(2) $\lim_{x \to a} f(x)$ حقيقية وموجودة — الغاية حقيقية وموجودة

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ — الغاية = الدالة عند النقطة a

57

واذا لم يتحقق اي شرط من الشروط الثلاثة نقول ان الدالة f غير مستمرة عند $x=a$

مثال 1

اذا كانت $f(x) = 8 - x^3 - 2x^2$ اثبت ان الدالة مستمرة ؟

الحل

$\forall b \in R$

$f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} (8 - x^3 - 2x^2)$$

$$= 8 - b^3 - 2b^2$$

$$\therefore \lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=b$ لكن $b \in$ تمثل كل عنصر من عناصر المجال

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة $\forall x \in R$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة

مثال 2

لتكن $f: R \to R$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x \geq 2 \\ 8-x & x < 2 \end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة عند $x=2$ ؟

الحل

$$f(2) = (2)^2 + 2 = 4+2 = 6$$

$L_1 =$ الغاية من اليمين $\lim_{x \to 2}(x^2+2) = 4+2 = 6$

$L_2 =$ الغاية من اليسار $\lim_{x \to 2}(8-x) = 8-2 = 6$

$\because L_1 = L_2 \to \lim_{x \to 2} f(x) = 6$.

$\therefore \lim f(x) = f(2)$

$\therefore$ f مستمرة عند $x=2$

مثال 3

اذا كانت $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ هل الدالة مستمرة عند $x=1$ ؟

الحل

$\because$ الدالة غير معرفة عند $x=1$ لذلك

الشرط الاساسي من الاستمرارية لم يتحقق

$\therefore$ الدالة غير مستمرة عند $x=1$

مثال 4

لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & x \geq 2 \\ -7 & x < 2 \end{cases}$ هل الدالة مستمرة عند $x=2$

الحل

$$f(2) = (2)^2 + 4 = 4+4 = 8$$

$\lim_{x \to 2} x^2+4 = (2)^2 + 4 = 8$ $= L_1 =$ الغاية من اليمين

$\lim_{x \to 2} -7 = -7$ $= L_2 =$ الغاية من اليسار

$\therefore L_1 \neq L_2 \Leftarrow$ ليس للدالة غاية

$\therefore$ الدالة ليست مستمرة عند $x=2$

تمارين (2-2)

(1) لتكن $f(x)=x^3+x^2+3$ ابحث استمرارية الدالة عند $x=3$ ؟

الحل

$f(3)=(3)^3+(3)^2+3=27+9+3=39$

$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}(x^3+x^2+3)=(3)^3+(3)^2+3=27+9+3=39$

$\because f(3)=\lim_{x\to 3} f(x) \longrightarrow$ الدالة مستمرة عند $x=3$

(2) لتكن $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ اثبت f مستمرة في مجالها ؟

الحل

اوسع مجال $=R=Q$ ، لتكن $a\in R$

$f(a)=\dfrac{a^2}{a^2+1}\in R$

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{a^2}{a^2+1}\in R$

$\because f(a)=\lim_{x\to a} f(x) \longrightarrow$ الدالة مستمرة عند $x=a$

$\because$ a يمثل كل عنصر من عناصر المجال

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة $\forall x\in R$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة

(3) لتكن $f(x)=x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها ؟

الحل

اوسع مجال $=R$ ، لتكن $a\in R \Leftarrow$

$f(a)=a^3$

$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} x^3=a^3$

$\because \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \longrightarrow$ الدالة مستمرة عند $x=a$

$\because$ a يمثل كل عنصر من عناصر المجال

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة

(4) لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\geq -1 \\ 3x+1 & x<-1 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$

الحل

$$f(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1$$

الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to -1} x^2-2=(-1)^2-2=-1$$

الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to -1} 3x+1=3(-1)+1=-2$$

∵ الغاية من اليمين ≠ الغاية من اليسار

∴ الغاية غير موجودة عند $x=-1$

∴ الدالة غير مستمرة عند $x=-1$

---

(5) لتكن $f(x)=|x-2|$ ابحث استمرارية الدالة عند $x=2$

الحل

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$$

$$f(2)=x-2=2-2=0$$

الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 2} x-2=2-2=0=L_1$$

الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 2} 2-x=2-2=0=L_2$$

$$\because L_1=L_2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

∴ الدالة مستمرة عند $x=2$

60

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(6) لتكن $f(x)=\begin{cases}1-2x & x\le 2\\ 1-x^2 & x>2\end{cases}$ اثبت ان f مستمرة عند $x=2$

الحل

$$f(2)=1-2(2)=1-4=-3$$

$$\lim_{x\to 2} 1-x^2=1-(2)^2=1-4=-3=L_1$$

$$\lim_{x\to 2} 1-2x=1-2(2)=1-4=-3=L_2$$

$$\because L_1=L_2 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=-3$$

$\because \lim_{x\to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow$ الدالة f مستمرة عند $x=2$

(7) لتكن $f(x)=\begin{cases}ax+3 & x\ge 1\\ 3x^2+1 & x<1\end{cases}$ جد قيمة $a\in R$ اذا كانت f مستمرة عند $x=1$ ؟

الحل

$\because f$ مستمرة عند $x=1 \Leftarrow$

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1} ax+3=\lim_{x\to 1} 3x^2+1$$

$$a(1)+3=3(1)^2+1$$

$$a+3=3+1 \Rightarrow a+3=4 \Rightarrow a=1$$

(8) لتكن $f(x)=\begin{cases}2x+b & x\le -1\\ x^2+a & x>-1\end{cases}$ جد قيمتي ($a\in R$ ، b) اذا كانت f مستمرة عند $x=-1$ وان $f(2)=7$

الحل

$$f(2)=7 \Rightarrow f(x)=x^2+a$$

$$f(2)=(2)^2+a \Rightarrow 4+a=7 \Rightarrow a=3$$

$$\lim x^2+a=\lim 2x+b \Rightarrow (-1)^2+3=2(-1)+b$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية العزيزية
٠٧٩٠٥٠٠٣١٨٦

$1+3=-2+b \rightarrow 4=-2+b \rightarrow b=6$

أنتهى الفصل 2 ويلحق الفصل 3 بأذن الله تعالى

الاسئلة الاثرائية الخاصة بالفصل 2

س1 / جد الغاية لكل من

(1) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-2}{x^3-1}$ (3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

س2 / لتكن $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=9$ ، $\lim\limits_{x \to -1} f(x)=-66$ جد قيمة $a, b \in R$

$f(x)=ax^3+bx-7$

س3 / لتكن $f(x)=\begin{cases} 5x-1 & x<2 \\ 2x^2+1 & x \geq 2 \end{cases}$ جد ان امكن

(1) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

س4 / اذا كانت $f(x)=x^3+2x+1$ ، $g(x)=2x^2-3x+4$

جد $\lim\limits_{x \to 2}(f \cdot g)$

س5 / اذا كانت $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-25}{x^2-8x+15}=-3a+11$ جد قيمة a

س6 / اذا كانت $f(x)=\begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة عند $x=0$

س7 / اذا كانت $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & x \neq 2 \\ 12 & x=2 \end{cases}$ ابحث امكانية الاستمرارية عند $x=2$ ؟

تم والحمد لله رب العالمين

62

الرياضيات

السادس الادبي

الفصل الثالث

المشتقة وتطبيقاتها

63

الأسئلة الوزارية

اعداد الاستاذ

سعد العبودي

تطلب حصراً من

مكتبة الفتح الجديد

طريقة ايجاد المشتقة باستخدام التعريف نتبع مايلي

① نكتب القانون
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

② نجد $f(x+\Delta x)$ حيث نعوض عن كل x ب $x+\Delta x$ مثلاً

$$f(x) = x+1 \rightarrow f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)+1$$

$$f(x) = 2x^2-1 \rightarrow f(x+\Delta x) = 2(x+\Delta x)^2-1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f(x+\Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$$

③ نختصر في البسط ثم نستخرج عامل مشترك (Δx) ثم نختصر مع المقام

④ نعوض عن كل Δx ب 0

64

مثال 2 اذا كانت $f(x) = x^2 + x+1$ جد $f'(2)$ باستخدام التعريف؟

الحل

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

عوضنا عن x ب 2

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + (2+\Delta x)+1 - [(2)^2+2+1]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4} + 4\Delta x + (\Delta x)^2 + \cancel{2} + \Delta x + \cancel{1} - \cancel{7}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(5+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (5+\Delta x) = 5+0 = 5$$

مثال 3 جد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ مستخدماً التعريف

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$\because f(x)=\frac{1}{x}$

$\therefore f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

مضاعف مشترك اصغر (توحيد المقامات)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\Delta x}{x(x+\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)}\times\frac{1}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$$

---

65 **مثال 4** جد مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستخدماً التعريف

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=$$

نضرب البسط والمقام × مرافق البسط

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cancel{x}+\Delta x)-\cancel{x}}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x})+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4/3

* ١- ايجاد معادلة مماس منحني الدالة عند نقطة معلومة

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

تتكون من

نقطة (x_1, y_1) تعطى في السؤال أو تعطى x_1 نعوضها في الدالة لاستخراج y_1 (x_1, y_1)

و

ميل $= m$ هو المشتقة الاولى عند نقطة التماس (x_1, y_1)

مثال 5 اذا كان $f(x) = x^2 - 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة مماس منحني الدالة عند هذه النقطة

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 1 - \overbrace{(2^2 - 1)}^{f(2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4} + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{1} - \cancel{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4 + 0 = 4 = m$$

يمثل الميل لان الميل هو المشتقة الاولى

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المماس هي

نحتاج نقطة (x_1, y_1) وبما ان $x_1 = 2$ نعوض في الدالة لاستخراج y_1 وكما يلي

$f(x) = x^2 - 1$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 = y_1 \longrightarrow (x_1, y_1) = (2, 3)$

$\therefore \boxed{y - 3 = 4(x - 2)}$ معادلة مماس المنحني

5/3

مثال اذا كان $f(x)=2x^2+3x+1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة مماس المنحني عند هذه النقطة

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \Rightarrow f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)+1-[2(2)^2+3(2)+1]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(4+4\Delta x+(\Delta x)^2)+6+3\Delta x+1-15}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{8}+8\Delta x+2(\Delta x)^2+\cancel{7}+3\Delta x-\cancel{15}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(8+2\Delta x+3)}{\cancel{\Delta x}}=8+2(0)+3=11$$

تمثل m الميل

$\because f(x)=2x^2+3x+1$

$f(2)=2(2)^2+3(2)+1=15=y_1$

$\therefore (x_1,y_1)=(2,15)$ النقطة

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1) \rightarrow \boxed{y-15=11(x-2)}$ معادلة المماس

ملاحظة معادلة العمود على المماس = معادلة المماس ولكن تختلف في الميل حيث

ميل العمود مقلوب ميل المماس عكس الاشارة

أي اذا كان ميل المماس $\longleftrightarrow$ ميل العمود مقلوبه عكس الاشارة

$$-\frac{1}{3} \longleftrightarrow 3$$

$$\frac{3}{8} \longleftrightarrow -\frac{8}{3}$$

$$-1 \longleftrightarrow 1$$

$\boxed{y-15=\frac{-1}{11}(x-2)}$ معادلة العمود

67

6/3

التطبيقات الفيزياوية في المشتقة

$$a(t) \xleftarrow{\text{اشتقاق}} v(t) \xleftarrow{\text{اشتقاق}} s=f(t)$$

حيث

$s=f(t)$ الازاحة، البعد، الموقع، الموضع، المسافة

$v(t)$ السرعة = مشتقة الازاحة

$a(t)$ التعجيل = مشتقة السرعة

t الزمن

$$\therefore\ v(t)=s'=f'(t)$$

$$a(t)=v'(t)$$

السرعة = $\boxed{v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}}$ 68

التعجيل = $\boxed{a(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}}$

مثال 7 لتكن $f(t)=2t^2+3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالامتار

جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدء الحركة ؟

الحل لايجاد الموقع

$\because\ f(t)=2t^2+3$ الموقع في اي زمن

$\therefore\ f(2)=2(2)^2+3=8+3=11$ متر الموقع بعد 2 ثانية

لايجاد السرعة

$$v(t)=f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$v(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$\therefore v(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(2+\Delta t)^2+3-11}{\Delta t}$$ f(2)

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(4+4\Delta t+(\Delta t)^2)-8}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{8}+8\Delta t+2(\Delta t)^2\cancel{-8}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{\Delta t}(8+2\Delta t)}{\cancel{\Delta t}}=8+2(0)=8$$ م/ثا

سرعة الجسم بعد 2 ثانية

مثال 8 لتكن $v(t)=3t^2$ جد التعجيل بعد 2 ثانية ؟

الحل

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$ التعجيل = مشتقة السرعة

69 $$a(2)=v'(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(2+\Delta t)-v(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(2+\Delta t)^2-3(2)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(4+4\Delta t+(\Delta t)^2)-12}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{12}+12\Delta t+3(\Delta t)^2\cancel{-12}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{\Delta t}(12+3\Delta t)}{\cancel{\Delta t}}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(12+3\Delta t)$$

$$=12+3(0)$$

$$=12$$ م/ثا² التعجيل

شهدت بأن العلم يعلو

بغير اللين في الجهد

(إترك الراحة واللين واجتهد للوصول الى غايتك)

تمارين (1-3)

(1) جد مشتقة الدالة $f(x)=x^2+5x$ باستخدام التعريف ثم احسب $f'(0)$, $f'(3)$?

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$f(x+\Delta x)$ $f(x)=x^2+5x$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)-(x^2+5x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+(\Delta x)^2+\cancel{5x}+5\Delta x-\cancel{x^2}-\cancel{5x}}{\Delta x}$$

$$=\lim\frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x+5)}{\cancel{\Delta x}}=2x+5$$

$$\therefore f'(x)=2x+5$$

$$f'(3)=2(3)+5=6+5=11$$

$$f'(0)=2(0)+5=0+5=5$$

70

(2) جد المشتقة بطريقة التعريف لكل مما يأتي

(a) $\frac{3}{x-1}$

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{3}{x+\Delta x-1}-\frac{3}{x-1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{3(x-1)-3(x+\Delta x-1)}{(x-1)(x+\Delta x-1)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\cancel{3x}-\cancel{3}-\cancel{3x}-3\Delta x+\cancel{3}}{(x-1)(x+\Delta x-1)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\cancel{\Delta x}}{(x-1)(x+\Delta x-1)}\times\frac{1}{\cancel{\Delta x}}=\frac{-3}{(x-1)(x-1)}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

(b) $f(x)=\sqrt{x+1}$

الحل

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$ مرافق البسط

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cancel{x}+\cancel{\Delta x}+\cancel{1})-(\cancel{x}+\cancel{1})}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+0+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

(3) اذا كانت $f(x)=x^2-3x-4$ جد $f'(x)$ مستخدماً التعريف ثم جد معادلة المماس لمنحني الدالة عند $x=1$

X1

الحل

$f(1)=(1)^2-3(1)-4=1-3-4=-6$ النقطة $(1,-6)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Rightarrow f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)-4-(-6)}{\Delta x}$$ $f(1)=-6$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{1}+2\Delta x+(\Delta x)^2-\cancel{3}-3\Delta x-\cancel{4}+\cancel{6}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x-3)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x-1)=-1=m$$ الميل

$$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-6)=-1(x-1)\rightarrow y+6=-x+1$$

$$y+x+6-1=0\longrightarrow y+x+5=0$$ معادلة المماس

15/3

(4) جسم يتحرك وفق العلاقة حيث f الازاحة بالامتار معطاة بالعلاقة $f(t)=t^2+2t+1$ جد سرعة الجسم بعد 3 ثواني من بدء الحركة ؟

الحل

$$v(t)=f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$v(3)=f'(3)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(3+\Delta t)-f(3)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(3+\Delta t)^2+2(3+\Delta t)+1-[(3)^2+2(3)+1]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{9}+6\Delta t+(\Delta t)^2+\cancel{6}+2\Delta t+\cancel{1}-\cancel{16}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{\Delta t}(6+\Delta t+2)}{\cancel{\Delta t}}=8 \text{ م/ثا}$$ السرعة بعد 3 ثواني

(5) اذا كانت السرعة معطاة بالعلاقة $v(t)=t^2+t+1$ م/ثا جد التعجيل عند $t=1$ ثانية ؟

الحل

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$a(1)=v'(1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(1+\Delta t)-v(1)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+\Delta t)^2+(1+\Delta t)+1-[(1)^2+1+1]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{1}+2\Delta t+(\Delta t)^2+\cancel{1}+\Delta t+\cancel{1}-\cancel{3}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{\Delta t}(2+\Delta t+1)}{\cancel{\Delta t}}$$

$$=3 \text{ م/ثا}^2$$ التعجيل

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

قواعد المشتقة

القاعدة الاولى: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفراً

أي

$$\text{if } f(x) = \text{عدد} \rightarrow f'(x) = \text{صفر}$$

مثال جد $f(x)$:

(a) $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$

(b) $f(x) = \sqrt{5} \rightarrow f'(x) = 0$

(c) $f(x) = 3a + b \rightarrow f'(x) = 0$

القاعدة الثانية:

$$\text{if } f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

أي اذا كانت $f(x) = x^n \leftarrow$ نضرب الاس x الدالة
و الاس - 1

$\times 3$

جميع قواعد المشتقة الاس -1

امثلة

(1) $f(x) = x^5 \rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

الاس × X

الاس - 1

(2) $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$

(3) $f(x) = x^{-3} \rightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

$-3-1=-4$

تذكر جمع وطرح الاشارات

* الاشارات متشابهة نجمع ونضع نفس الاشارة

$-1-2=-3$

$+1+2=+3$

* الاشارات مختلفة نطرح ونأخذ اشارة العدد الكبير

$-3+2=-1$

$-2+3=+1$

(4) $f(x) = x^{\frac{5}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$

الاس - 1

طريقة سهلة لايجاد $\frac{5}{2} - 1 = \frac{\text{البسط} - \text{المقام}}{\text{المقام}} = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2}$

(12)/3

(5) $f(x)=x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}$ $\quad \frac{2-5}{5}=\frac{-3}{5}$

(6) $g(t)=t^{\frac{-1}{2}} \rightarrow g'(t)=\frac{-1}{2}t^{\frac{-3}{2}}$ $\quad \frac{-1-2}{2}=\frac{-3}{2}$

(7) $f(x)=\dfrac{1}{x^{-3}}$

ملاحظة في حالة الكسر $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$
و x في المقام يجب ان نرفع x من
المقام الى البسط مع تغير اشارة الاس فقط قبل الاشتقاق

$f(x)=x^{3} \longrightarrow f'(x)=3x^{2}$

(8) $f(x)=\dfrac{1}{x^{5}}=x^{-5} \longrightarrow f'(x)=-5x^{-6}$

(9) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

ملاحظة في حالة الجذر يجب اولاً ان
نتخلص من الجذر قبل الاشتقاق وذلك
بقسمة الاس داخل الجذر على الاس خارج الجذر

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad 1 \rightarrow$ داخل $\quad 3 \rightarrow$ خارج

$\longrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

(10) $f(x)=\sqrt{x^{-5}}=x^{\frac{-5}{2}}$ $\quad -5 \rightarrow$ داخل $\quad 2 \rightarrow$ خارج

$f'(x)=\frac{-5}{2}x^{\frac{-7}{2}}$ $\quad \frac{-5-2}{2}=\frac{-7}{2}$

(11) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ملاحظة في حالة الجذر والكسر معاً يجب
اولاً ان نتخلص من الجذر
ثم من الكسر قبل الاشتقاق

$f(x)=\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ تخلصنا من الجذر

$f(x)=x^{\frac{-1}{2}}$ تخلصنا من الكسر

$f'(x)=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$ $\quad \frac{-1-2}{2}=\frac{-3}{2}$

الأستاذ [illegible] العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

74

13/3

القاعدة الثالثة عدد × دالة

اذا كانت $f(x)=cx^{n} \longrightarrow f'(x)=n\cdot c\,x^{n-1}$

حيث c عدد حقيقي

* اي نضرب الاس x بعدد حقيقي و ننقص من الاس واحد
* تشبه القاعدة الثانية ولكن يأتي عدد قبل الدالة
* جميع الملاحظات في القاعدة 2 تطبق على جميع القواعد

امثلة

(1) $f(x)=3x^{2} \longrightarrow f'(x)=2(3x^{2-1})=6x$

(2) $f(x)=-2x^{3} \longrightarrow f'(x)=-6x^{2}$

تذكر ضرب الاشارات

$$- = \begin{cases} (+)\times(-) \\ (-)\times(+) \end{cases} \qquad + = \begin{cases} (-)\times(-) \\ (+)\times(+) \end{cases}$$

(3) $y=-4x^{-1} \longrightarrow y'=4x^{-2}$ $\quad -4\times -1=+4$ $\quad -1-1=-2$

(4) $f(x)=3x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x)=3\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ $\quad \frac{1-2}{2}=\frac{-1}{2}$

$=\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

(5) $f(x)=\frac{3}{4}x^{2} \longrightarrow f'(x)=2\cdot\frac{3}{4}x^{1}=\frac{3}{2}x$

(6) $f(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} \longrightarrow f'(x)=\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{5}{\cancel{3}}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}$

(7) $f(x)=3\sqrt[5]{x} \xrightarrow{\text{نتخلص من الجذر}} f(x)=3x^{\frac{1}{5}}$ داخل على الخارج

$f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-4}{5}}$

(8) $f(x)=\frac{3}{x^{2}} \xrightarrow{\text{نتخلص من الكسر}} f(x)=3x^{-2} \longrightarrow f'(x)=-6x^{-3}$

(9) $f(x)=\frac{-2}{\sqrt{x^{3}}}=\frac{-2}{x^{\frac{3}{2}}}=-2x^{\frac{-3}{2}} \longrightarrow f'(x)=3x^{\frac{-5}{2}}$

القاعدة الرابعة

مشتقة مجموع عدد منتهي من الدوال تساوي مجموع مشتقاتها

قاعدة الجمع والطرح

اي اذا كان $f(x)=g(x)\mp h(x)$

فان $f'(x)=g'(x)\mp h'(x)$

اي عند اشتقاق حاصل جمع أو طرح عدة دوال فاننا نشتق كل دالة لوحدها مثل

① $f(x)=x^2+3x+1$

$f'(x)=2x+3$

مشتقة $3x$ هي 3

مشتقة x^2

② $y=3x^{-4}+\frac{1}{2}x^3-5x^{-2}+9x-7$

$y'=-12x^{-5}+\frac{3}{2}x^2+10x^{-3}+9$

③ $f(x)=x^3-\frac{3}{x^2}+\sqrt{x}-1$

نتخلص من الكسر

نتخلص من الجذر

$f(x)=x^3-3x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}-1$

مشتقة العدد = صفر

$f'(x)=3x^2+6x^{-3}+\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

76

ملاحظة

اذا كانت $f(x)=cx \longrightarrow f'(x)=c$

امثلة

$f(x)=3x \longrightarrow f'(x)=3$

$y=\frac{-1}{2}x \longrightarrow y'=\frac{-1}{2}$

$f(x)=\sqrt{3}\,x \longrightarrow f'(x)=\sqrt{3}$

اي اذا جاء عدد x X والاس = 1 فان المشتقة = العدد نفسه

15/3 قاعدة الضرب

القاعدة الخامسة (الضرب)

حفظ

مشتقة حاصل ضرب دالتين تساوي (

الاولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الاولى

اي اذا كانت $f(x)=\underset{\text{اولى}}{g(x)}\cdot\underset{\text{ثانية}}{h(x)}$

فان $f'(x)=g(x)\cdot h'(x)+h(x)\cdot g'(x)$

مثال

(1) $f(x)=\underset{\text{اولى}}{(x^2+1)}\underset{\text{ثانية}}{(3x-2)}$

$f'(x)=\underset{\text{اولى}}{(x^2+1)}\underset{\text{مشتقة الثانية}}{(3)}+\underset{\text{الثانية}}{(3x-2)}\underset{\text{مشتقة الاولى}}{(2x)}$

2) $f(x)=(x^4-x^2+1)(5x^6-3x)$

$f'(x)=(x^4-x^2+1)(30x^5-3)+(5x^6-3x)(4x^3-2x)$

(3) $f(x)=\sqrt{x}\,(x+6)$ نتخلص من الجذر

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}(x+6)$

طريقة (1) للحل (التوزيع)

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{1}+6x^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}$ عند الضرب نجمع الاسس

$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}$

$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{\sqrt{x}}$

طريقة 2 للحل (حاصل ضرب دالتين)

$f'(x)=x^{\frac{1}{2}}(1)+(x+6)\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$

$=\underbrace{x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}+3x^{\frac{-1}{2}}$

$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}$

$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{\sqrt{x}}$

القاعدة السادسة (القسمة) قاعدة القسمة

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)$

تساوي $\dfrac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{[\text{المقام}]^2}$

أي إذا كانت $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

فان $f'(x)=\dfrac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$

الأستاذ سعد العبيد
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

أمثلة جد مشتقة الدالة

(1) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot 0-3\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^4+1}$ جد المشتقة عند $x=1$

$$f'(x)=\frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1)=\frac{(1^4+1)(3(1)^2)-((1)^3+1)(4(1)^3)}{((1)^4+1)^2}$$

$$=\frac{(2)(3)-(2)(4)}{(2)^2}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

(3) $y=\dfrac{-2x}{(1-x)}$ جد $\dfrac{dy}{dx}$ (المشتقة) ؟

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-x)\cdot(-2)-(-2x)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-2+\cancel{2x}-\cancel{2x}}{(1-x)^2}=\frac{-2}{(1-x)^2}$$

78

قاعدة القوس

القاعدة السابعة (القوس)

اذا كانت $f(x)=[h(x)]^{n}$ فان

$$f'(x)=n[h(x)]^{n-1}\cdot h'(x)$$

مشتقة داخل القوس

امثلة

(1) $f(x)=(x^2+1)^3 \longrightarrow f'(x)=3(x^2+1)^2(2x)$

مشتقة داخل القوس

$f'(x)=6x(x^2+1)^2$

(2) $f(x)=(x^3+x^2+x+1)^5$

$f'(x)=5(x^3+x^2+x+1)^4\cdot(3x^2+2x+1)$

الاس × القوس كما هو $x^{\text{الاس}-1}$ × مشتقة داخل القوس

(3) $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$

دائماً داخل الجذر يوضع داخل قوس

$f(x)=(x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}$

تتخلص من الجذر قبل الاشتقاق الداخل على الخارج

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x+1)^{\frac{-1}{2}}(2x-2)$

$=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2-2x+1)^{\frac{-1}{2}}\cdot\cancel{2}(x-1)$ عامل مشترك

$=\dfrac{(x-1)}{(x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{(x-1)}{\sqrt{(x^2-2x+1)}}$

قاعدة خاصة بالجذر التربيعي فقط

مشتقة الجذر التربيعي = $\dfrac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\text{الجذر كما هو}}}$

المثال السابق

(4) $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ جد $f'(x)$ عند نقطة $x=1$

الحل

(نطبق قاعدة القوس)

$$f'(x)=4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\times\left(\frac{(x+1)\cdot 1-x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

الاس

القوس كما هو

مشتقة داخل القوس

$$=4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\right)=4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3\left(\frac{1}{(1+1)^2}\right)=\cancel{4}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{\cancel{4}}\right)=\frac{1}{8}$$

ملاحظة :- لتكن $y=f(x)$ دالة (80

فان

$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}$ المشتقة الاولى

$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ المشتقة الثانية (مشتقة المشتقة الاولى)

مثال 1

اذا كانت $y=x^4+5x^3+3$ جد y' ، y'' ؟

الحل

$y'=4x^3+15x^2$ المشتقة الاولى

$y''=12x^2+30x$ المشتقة الثانية

مثال 2 اذا كانت $f(x)=2x^3+4+\frac{3}{x}$ جد $f'(x)$, $f''(x)$,

$f''(-1)$?

الحل

نتخلص من المقام

$f(x)=2x^3+4+3x^{-1}$

$f'(x)=6x^2-3x^{-2}=6x^2-\frac{3}{x^2}$

الأستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة

$f'(x) = 6x^2 - 3x^{-2}$

$f''(x) = 12x + 6x^{-3} = 12x + \frac{6}{x^3}$

$\therefore f''(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 - 6 = -18$

ملاحظة

$-1 = (-1)^{\text{فردي}}$ مثل $-1 = (-1)^9$

$+1 = (-1)^{\text{زوجي}}$ مثل $+1 = (-1)^{28}$

تمارين (2-3)

(1) جد باستخدام القواعد كل من الدوال الآتية عند العدد المؤشر ازائها:

81 (a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1 \quad , x = 1$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$ قاعدة الجمع

$f'(1) = 3(1)^2 - 8(1) + 1 = 3 - 8 + 1 = -4$

نعوض محل كل x بـ 1

(b) $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3) \quad , x = 2$

الحل

$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$ قاعدة الضرب

$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + ((2)^2 + 3)(-1)$

$= (2)(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$

(c) $f(x) = \frac{4 - 5x}{x^2 + x + 1} \quad , x = -1$

الحل

$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(-5) - (4 - 5x)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ قاعدة القسمة

20%

$$f'(-1)=\frac{[(-1)^2+(-1)+(+1)](-5)-[4-5(-1)][2(-1)+1]}{[(-1)^2+(-1)+1]^2}$$

$$=\frac{[\cancel{1}-\cancel{1}+1](-5)-[9.][-1]}{[\cancel{1}-\cancel{1}+1]^2}=\frac{-5+9}{1}=4$$

(d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $\quad x=0$

الحل

جذر وكسر

$$f(x)=\frac{1}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=(2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

قاعدة القوس

$$f'(x)=\frac{-1}{\cancel{2}}(2x+1)^{\frac{-3}{2}}(\cancel{2})=\frac{-1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(0)=\frac{-1}{(2(0)+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{(1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-1}{1}=-1$$

82

(e) $f(x)=x+\frac{3}{x^2+2}$ $\quad , x=-1$

الحل

قاعدة الجمع

وقاعدة القسمة

$$f'(x)=1+\frac{(x^2+2)\cdot 0-3(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=1+\frac{-6x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(-1)=1+\frac{-6(-1)}{[(-1)^2+2]^2}=1+\frac{6}{9}=1+\frac{2}{3}$$

$$=1\frac{2}{3}$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

20 b/3

(2) اذا كانت $f(x)=(x^2-3)^4$ جد $f'(x)$
عند $f''(x)$ عند $x=2$

الحل

$f'(x)=4(x^2-3)^3\cdot 2x$ قاعدة القوس

$f'(2)=4(4-3)^3\cdot 4=16(1)^3=16$

$f'(x)=8x(x^2-3)^3$ حاصل ضرب دالتين

$f''(x)=8x\cdot 3(x^2-3)^2\cdot 2x+(x^2-3)^3\cdot 8$

$f''(2)=48x^2(x^2-3)^2+8(x^2-3)^3$

$f''(2)=48(2)^2(4-3)^2+8(4-3)^3$

$=192+8=200$

83

(3) اذا كانت $f(x)=(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ جد $f'(x)$ و $f'(2)$

الحل

$f'(x)=\frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}\cdot(3x^2+6x)$ قاعدة القوس

$f'(2)=\frac{3}{2}(8+12-3)^{\frac{1}{2}}(12+12)$

$=\frac{3}{2}(17)^{\frac{1}{2}}(24)=36\sqrt{17}$

الواجب البيتي

جد المشتقة لكل من

واجب ١٩

(1) $f(x)=\sqrt{1-2x+3x^2}$

(2) $f(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2+1)$

(3) $f(x)=\frac{-3x}{1+x^3}$

(4) $=(x^6-3x^4+2x^2+1)^{-2}$

(5) $f(x)=x^3-\frac{1}{x^{-2}}+x^{-1}+9$

اذا لاتعرف الحل فاسأل . لاتترك اي سؤال

الأستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠١٠٣١٨٦

التطبيقات الهندسية

* ايجاد معادلة مماس منحني الدالة

لقد تم دراسة هذا الموضوع في بداية الفصل . والفرق اننا نجد ميل المماس باستخدام قواعد المشتقة .

نتذكر

معادلة المماس $\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$

نحتاج الى

ميل وهو المشتقة الاولى عند (x_1,y_1)

و نقطة وهي (x_1,y_1) حيث تعطى في السؤال او

تعطى x_1 فقط نعوضها في الدالة الاصلية

او تعطى y_1 فقط نعوضها في الدالة الاصلية

مثال 1 جد معادلة المماس لمنحني الدالة عند $x=1$ (84

$f(x)=x^2-5x+2$

الحل

$f(1)=(1)^2-5(1)+2=1-5+2=-2 \rightarrow (1,-2)$

نقطة التماس

لايجاد الميل m نجد المشتقة

$f'(x)=2x-5$

$f'(1)=2(1)-5=-3=m$

اصبح لدينا ميل ونقطة $\Leftarrow$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-2)=-3(x-1) \rightarrow y+2=-3x+3$

$y+3x+2-3=0 \rightarrow \boxed{y+3x-1=0}$ معادلة المماس

مثال 2 جد معادلة المماس لمنحني الدالة عند $x=5$

$f(x)=\sqrt[3]{x+3}$

الحل

$f(5)=\sqrt[3]{5+3}=\sqrt[3]{8}=2=y_1 \rightarrow (5,2)$ النقطة 1

$f(x)=(x+3)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}\cdot 1$

$f'(x)=\frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}} \rightarrow f'(5)=\frac{1}{3(5+3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3(8)^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{1}{3[(2)^3]^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3(2)^2}=\frac{1}{12}=m$

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1) \rightarrow y-2=\frac{1}{12}(x-5)$ ضرب $12\times$

$12y-24=(x-5) \rightarrow \boxed{12y-x-19=0}$ معادلة المماس

85

مثال 3 جد معادلة المماس للمنحني $y=x^2+1$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات ؟

الحل

ملاحظة

$x=0 \leftarrow$ نقطة تقاطع مع محور الصادات

$y=0 \leftarrow$ نقطة تقاطع مع محور السينات

$\therefore\ x=0 \rightarrow y=(0)^2+1 \rightarrow y=1 \rightarrow (0,1)$ نقطة التماس

$y'=2x \rightarrow y'=2(0)=0=m$

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=0(x-0)$

$y-1=0$ معادلة المماس

مثال 3 جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $y=\frac{2x+1}{3-x}$ عندما $y=5$

الحل يجب اولاً ان نجد نقطة التماس $(x,y) \leftarrow$

$\because y=5 \rightarrow 5=\frac{2x+1}{3-x} \xrightarrow{\text{حاصل ضرب الطرفين = الوسطين}} 5(3-x)=2x+1$

$15-5x=2x+1 \rightarrow 15-1=2x+5x \rightarrow 14=7x \rightarrow x=\frac{14}{7}$

$\therefore x=2 \rightarrow$ (2,5) نقطة التماس

نجد الميل $\leftarrow$

$$y'=\frac{(3-x)\cdot 2-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}=\frac{(3-2)\cdot 2-(4+1)(-1)}{(3-2)^2}$$

$$y'=\frac{2+5}{1}=7=m$$

ميل المماس $=7 \rightarrow$ ميل العمود $=\frac{-1}{7}$

لا تنسى (ميل العمود = مقلوب ميل المماس عكس الإشارة)

$\therefore y-y_1=m(x-x_1)$

$y-5=7(x-2) \rightarrow y-5=7x-14$

$\rightarrow \boxed{y-7x+9=0}$ معادلة المماس

$\rightarrow y-5=\frac{-1}{7}(x-2) \xrightarrow{\times(7)} 7y-35=-x+2$

$\therefore \boxed{7y+x-37=0}$ معادلة العمود

يجب ان تكون القراءة في الرياضيات ب (الورقة والقلم). لا تقرأ شفوي فقط

ايجاد نقطة التماس (X, Y)

طريقة الحل

① المشتقة = الميل

مفتاح حل جميع اسئلة ايجاد النقطة

$$f'(X) = m$$

m الميل

اما يعطى في السؤال (مثال 1)

او (يوازي محور السينات) ∴ $m = 0$ لاحظ (مثال 2)

أو يوازي المستقيم الذي معادلته $ax + by + c = 0$

$$\boxed{m = \frac{-a}{b}}$$

اي $\boxed{\text{الميل} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}}$

أي $\boxed{m = \frac{-\text{معامل } X}{\text{معامل } Y}}$

(87)

② من المعادلة $f'(x) = m$ نبسط ثم نستخرج قيم x

③ نعوض قيم x في الدالة الاصلية لاستخراج y (X, Y)

مثال 1 جد نقطة تنتمي الى المنحني $Y = x^2 - 5X + 4$ والتي ميل المماس عندها يساوي 3 ؟

الحل

$$f'(x) = m \longrightarrow 2x - 5 = 3 \longrightarrow 2x = 8 \longrightarrow x = 4$$

نعوضها في الدالة الاصلية

$$\therefore f(4) = Y = (4)^2 - 5(4) + 4$$

$$= 16 - 20 + 4 = -4 + 4 = 0$$

∴ نقطة التماس $(4, 0)$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

25/3

مثال 2 جد نقطة تنتمي الى منحني الدالة
$f(x)=2x^2+4x+3$ بحيث عندها المماس موازياً لمحور السينات ؟

الحل

$f'(x)=m \longrightarrow 4x+4=0$ — $m=0$ لان المماس يوازي محور السينات

$4x=-4 \rightarrow x=-1$

$\therefore y=f(-1)=2(-1)^2+4(-1)+3$

$=2-4+3=-2+3=1$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(-1,1)$

مثال 3 جد نقطة تنتمي الى المنحني $f(x)=x^2-4x+5$ والتي
عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y+2x+3$

الحل

$2x+y+3=0$ ميل المستقيم $=\dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\dfrac{-2}{1}$

$\therefore m=-2$

$f'(x)=m \longrightarrow 2x-4=-2 \rightarrow 2x=2 \xrightarrow{2\div} x=1$

$f(1)=(1)^2-4(1)+5=1-4+5=2=y$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(1,2)$ — 88

ملاحظة

اذا $\boxed{\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \longleftrightarrow m_1 = m_2}$ المستقيمان متوازيان $\Leftrightarrow$ ميل الاول = ميل الثاني

$\boxed{\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \longleftrightarrow m_1 = \dfrac{-1}{m_2}}$ المستقيمان متعامدان $\Leftrightarrow$ ميل الاول = مقلوب ميل الثاني عكس الاشارة

مثال 4 اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+ax+b$ وكان ميل المماس للمنحني عند $x=-1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة $(-3,2)$ جد قيمة a, b الحقيقيتين ؟

ملاحظات مهمة

① ميل المماس = المشتقة الاولى عند $x=a$

② المنحني الذي يمر بالنقطة ← النقطة تحقق المعادلة الاصلية للمنحني (اي نعوض مكان كل x و y)

الحل

$\because f(x)=x^2+ax+b$

$f'(x)=2x+a \rightarrow 4=2(-1)+a$

ميل المماس $= f'(x)$

$x=-1$ من السؤال

$\therefore 4=-2+a \rightarrow \boxed{a=6}$

89

نعوض النقطة $(-3,2)$ في الدالة الاصلية

حيث كل نقطة هي (x,y) وكل $y=f(x)$

$\because f(x)=x^2+ax+b$

$2=(-3)^2+6(-3)+b \rightarrow 2=9-18+b \rightarrow 11=b$

التطبيقات الفيزياوية

لقد تم شرح هذا الموضوع في بداية الفصل ولكن تم ايجاد المشتقة سابقاً باستخدام التعريف والآن سيتم استخدام قواعد المشتقة . (نتذكر) المخطط مهم لحل جميع المسائل الفيزياوية

$s(t) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} v(t) \xrightarrow{\text{اشتقاق}} a(t)$

$s(t)$ المسافة - الازاحة - البعد - الموقع - الموضع تقاس بالامتار

$v(t)$ السرعة تقاس بالمتر / ثانية أو م/د أو كم/ساعة

$a(t)$ التعجيل تقاس بالمتر / ثا² أو م/د² أوكم/سا²

الأستاذ سعد العبودي

27/3

(مثال 1) جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة
$s(t)=t^3+3t^2+4t+1$ حيث $s(t)$ تقاس بالامتار والزمن بالدقائق
جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد 5 دقائق من بدأ حركته ؟

الحل

$s(t)=t^3+3t^2+4t+1$ الموضع في اي زمن

$v(t)=s'(t)=3t^2+6t+4$ السرعة في اي زمن

$a(t)=v'(t)=6t+6$ التعجيل في اي زمن

المطلوب في السؤال الموضع والسرعة والتعجيل بعد 5 دقائق ⇐ نعوض مكان كل $t=5$ وكما يلي

$s(5)=(5)^3+3(5)^2+4(5)+1$

$=125+75+20+1=221$ متر (الموضع بعد 5 دقائق)

$v(5)=3(5)^2+6(5)+4=75+30+4=109$ م/د
(السرعة بعد 5 دقائق)

$a(5)=6(5)+6=36$ م/د² (التعجيل بعد 5 دقائق)

90

(مثال 2) يتحرك جسم على خط مستقيم وفق العلاقة $s(t)=t^2-20t+120$
حيث يقاس البعد بالكيلومترات والزمن بالساعة . احسب
(1) السرعة بعد خمس ساعات
(2) بعده عندما تصبح سرعته صفراً

الحل (1) لايجاد السرعة (نشتق البعد) $v(t)=2t-20$

السرعة بعد $t=5$. $v(5)=2(5)-20=10-20=-10$ كم/ساعة

(2) البعد هو $s(t)$ ولكن عندما تصبح السرعة صفراً لذلك نعوض مكان السرعة صفر لايجاد الزمن . ثم نعوض الزمن في البعد

$\because v(t)=2t-20 \longrightarrow 0=2t-20 \longrightarrow t=10$ ساعة الزمن عندما السرعة صفر

$\therefore s(10)=(10)^2-20(10)+120=100-200+120=20$ كم
البعد عندما السرعة تصبح صفراً

الأستاذ محمد العبودي

2B/3

مثال (25) (كتاب) يتحرك جسم على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t)=\sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته $\frac{1}{3}$ م/ثا ؟

الحل نجد السرعة ثم نعوض مكان السرعة بـ $\frac{1}{3}$ لايجاد الزمن

اتذكر نتخلص من الجذر قبل الاشتقاق الداخل على الخارج

$$s(t)=(2t+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(t)=s'(t)=\frac{1}{\cancel{2}}(2t+1)^{\frac{-1}{2}}\cdot\cancel{2}$$ قاعدة القوس

$$v(t)=\frac{1}{(2t+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{\sqrt{2t+1}} \longrightarrow \sqrt{2t+1}=3 \xrightarrow{\text{بتربيع الطرفين}} 2t+1=9$$ 91

$\therefore\ 2t=8 \longrightarrow t=4$ ثانية

مثال 26 (كتاب) قذف جسم نحو الاعلى عن سطح الارض بازاحة معطاة وفق العلاقة $s(t)=96t-16t^2$ حيث $s(t)$ الازاحة بالامتار . t بالثواني . احسب

(1) سرعة الجسم بعد ثانيتين (2) متى يصل الجسم الى اعلى نقطة

الحل (1)

$\because\ s(t)=96t-16t^2$

$\therefore\ v(t)=96-32t$ السرعة في اي زمن

$v(2)=96-32(2)=96-64=32$ م/ثا ← السرعة $t=2$

(2) اقصى ارتفاع يصله الجسم عندما تصبح سرعته = صفر

$\because\ v(t)=96-32t \longrightarrow 0=96-32t \longrightarrow 32t=96$

$t=\frac{96}{32} \longrightarrow t=3$ ثانية

الاستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

29/3

مثال 27 اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t)=t^3-6t^2+18t+12$

حيث $s(t)$ بالامتار ، t الزمن بالثانية . احسب بعد الجسم عن نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح تعجيله صفراً .

الحل نجد التعجيل ثم نعوضه مكانه صفراً لايجاد الزمن (t) ثم نعوض (t) في البعد $s(t)$ والسرعة $v(t)$

$\because s(t)=t^3-6t^2+18t+12$ الازاحة

$\because v(t)=3t^2-12t+18$ السرعة

$a(t)=6t-12$ التعجيل

$0=6t-12 \rightarrow 6t=12 \rightarrow t=2$ ثانية

$s(2)=(2)^3-6(2)^2+18(2)+12$

$=8-24+36+12$

$=32$ متر ← بعد الجسم عندما $t=2$

$v(2)=3(2)^2-12(2)+18$

$=12-24+18=6$ م/ثا ← السرعة عندما $t=2$

92

اسئلة الواجب البيتي

(1) جسم يتحرك في خط مستقيم بحيث بعده (م) بالامتار معرف بالعلاقة $s(t)=6\sqrt{3t^2+4}$ جد موضعه وسرعته بعد (2) ثانية عن بدء الحركة ؟

(2) اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t)=t^3-6t^2-15t+17$ حيث م بالامتار ، ن الزمن بالثواني ، احسب بعد الجسم وتعجيله عن نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعته صفراً .

(3) جسم يتحرك في خط مستقيم بحيث ان بعده (م) بالامتار بعد (ن) من الثواني هو $s(t)=\sqrt{3t^2+24}$ احسب بعده عندما تكون سرعته (1) متر/ثانية

بعض تطبيقات المشتقة في الاقتصاد

لتكن

$C(X)$ دالة التكلفة الكلية . وهي دالة لمتغير X يمثل حجم الانتاج

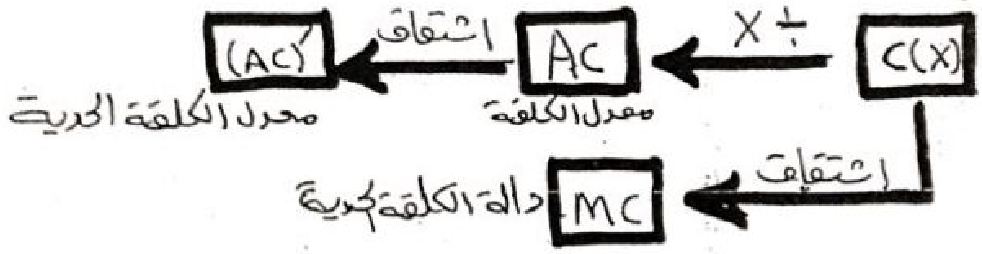
$MC = C'(X)$ دالة الكلفة الحدية

$AC = \frac{C(X)}{X}$ معدل الكلفة

$(AC)'$ معدل الكلفة الحدية

∴ يمكن تلخيصه بالمخطط التالي

93



مثال 1 لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما

$C(X) = 3X^2 - 60X + 1200$ جد

(a) دالة الكلفة الحدية (b) دالة معدل الكلفة

(c) دالة معدل الكلفة الحدية (d) حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة

الحل

(a) $MC = C'(X) = 6X - 60$ دالة الكلفة الحدية

(b) $AC = \frac{C(X)}{X} = \frac{3X^2 - 60X + 1200}{X} = 3X - 60 + \frac{1200}{X}$ دالة معدل الكلفة

(c) $(AC)' = \frac{d}{dx}(AC) = 3 - \frac{1200}{X^2}$ —— $\frac{1200}{X} = 1200X^{-1} \xrightarrow{\text{مشتقة}} -1200X^{-2}$

(d) لايجاد حجم الانتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة نجعل دالة معدل الكلفة الحدية = صفراً اي $(AC)' = 0$

$\therefore 3 - \frac{1200}{X^2} = 0 \xrightarrow{\text{بالضرب في } X^2} 3X^2 = 1200 \rightarrow X^2 = 400 \rightarrow X = 20$

الكلفة الكلية $C(20) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200 = 1200$

تمارين (3-3)

(1) جد معادلة مماس المنحني $f(x)=x^3-3x^2+9x+5$ عند $x=0$

الحل نحتاج نقطة وميل

$f(0)=(0)^3-3(0)^2+9(0)+5=5=y$

$\therefore$ النقطة هي $(0,5)$

لايجاد الميل (نشتق ونعوض عن $x=0$)

$f'(x)=3x^2-6x+9$

$f'(0)=3(0)^2-6(0)+9=9=m$

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)\rightarrow y-5=9(x-0)$

معادلة المماس $y-5=9x \rightarrow \boxed{y-9x-5=0}$

---

(2) جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y=(x-3)^3$ عند $x=2$ ؟ 94

الحل

$y=(2-3)^3=(-1)^3=-1\rightarrow$ نقطة التماس $(2,-1)$

$y'=3(x-3)^2\cdot 1\rightarrow y'=3(2-1)^2=3=m$

$\therefore\ y-y_1=m(x-x_1)\rightarrow y-(-1)=3(x-2)$

$y+1=3x-6\rightarrow y-3x+7=0$ معادلة المماس

$\therefore$ ميل المماس $=3\rightarrow$ ميل العمود $=\frac{-1}{3}$ مقلوب ميل المماس مع عكس الإشارة

$\therefore\ y+1=\frac{-1}{3}(x-2)\xrightarrow{\text{نضرب في } 3} 3y+3=-1(x-2)$

$3y+3=-x+2\rightarrow 3y+x+1=0$ معادلة العمود

(3) جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x=-1$ ؟

الحل

$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + \frac{3}{(-1)^2+2}$

$= -1 + 2 + \frac{3}{3} = -1+2+1 = 2 \rightarrow (-1, 2)$ النقطة

$f'(x) = 3x^2 - 2 + \frac{(x^2+2)\cdot 0 - 3\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$= 3x^2 - 2 + \frac{-6x}{(x^2+2)^2}$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 + \frac{-6(-1)}{[(-1)^2+2]^2}$

$= 1 + \frac{6}{9} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} =$ ميل المماس

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = \frac{5}{3}(x-(-1))$ نضرب في 3

$3y - 6 = 5x + 5 \longrightarrow 3y - 5x - 11 = 0$ معادلة المماس

95

(4) جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات ؟

الحل

$f'(x) = m$ ← $m=0$ لان المماس يوازي محور السينات

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\div 3 \longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تجزئة}} (x-3)(x+1)$

أما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$ أو $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

اذا $x = 3 \rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4$

$= \cancel{27} - \cancel{27} - 27 + 4 = -23$ $(3, -23)$ النقطة الاولى

اذا $x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 =$

$= -1 - 3 + 9 + 4 = 9$ $(-1, 9)$ النقطة الثانية

(5) جد النقط على المنحني $f(x)=x^2-4x+5$ عندما يكون مماس المنحني يوازي المستقيم $2x-y=0$

الحل نجد ميل المماس

$$m=\frac{-\text{معامل }x}{\text{معامل }y}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$f'(x)=m \rightarrow 2x-4=2 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

نعوض $x=3$ في الدالة الاصلية

$$f(3)=(3)^2-4(3)+5=9-12+5=-3+5=2$$

∴ النقطة $(3,2)$

---

(6) جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان بعده بالامتار . والزمن بالثواني معطى بالعلاقة $s(t)=\sqrt{2t^2+18}$ احسب بعده عندما تصبح السرعة 1 م/ثا .

الحل نجد السرعة ثم نعوض محلها (1) لاستخراج الزمن ثم نعوض الزمن في $s(t)$ لاستخراج البعد 96

مشتقة داخل الجذر

$$s(t)=\sqrt{2t^2+18} \rightarrow v(t)=\frac{4t}{\cancel{2}\sqrt{2t^2+18}}$$

2× الجذر

$$v(t)=\frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}} \quad , \quad v(t)=1$$

$$1=\frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}} \xrightarrow{\text{وسطين = طرفين}} \sqrt{2t^2+18}=2t$$

تربيع الطرفين $\longrightarrow (2t^2+18)=(2t)^2 \rightarrow 2t^2+18=4t^2$

$2t^2=18 \rightarrow t^2=9 \rightarrow t=3$ أو $t=-3$ يهمل

نعوض $t=3$ في الدالة

$$s(t)=\sqrt{2t^2+18}$$

$$s(3)=\sqrt{2(3)^2+18}=\sqrt{18+18}=\sqrt{36}=6 \text{ متر}$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(7) اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t)=t^3-6t^2+9t+7$ حيث
ان s يعده بالامتار ، t الزمن بالثواني . احسب
(a) بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعته صفراً
(b) بعد الجسم من نقطة بداية الحركة عندما يصبح التعجيل صفراً

الحل (a) نجد السرعة ثم $v(t)=0$ لاستخراج t ثم نعوضه في s(t)

$s(t)=t^3-6t^2+9t+7$

$v(t)=s'(t)=3t^2-12t+9 \longrightarrow 3t^2-12t+9=0 \quad (\div 3)$

$t^2-4t+3=0 \longrightarrow (t-3)(t-1)=0 \longrightarrow t=3$ أو $t=1$

$t=3 \longrightarrow s(t)=t^3-6t^2+9t+7$

$s(3)=(3)^3-6(3)^2+9(3)+7=27-54+27+7=7$ متر

97

$t=1 \longrightarrow s(1)=(1)^3-6(1)^2+9(1)+7=1-6+9+7=11$ متر

(b) نجد التعجيل باشتقاق السرعة ثم نعوض عن التعجيل بـ 0 لاستخراج
t ثم نعوضه في s(t)

$\because v(t)=3t^2-12t+9$

$a(t)=v'(t)=6t-12 \longrightarrow 6t-12=0 \longrightarrow 6t=12$

$\therefore t=2$ ثانية

$\therefore s(t)=(2)^3-6(2)^2+9(2)+7$

$=8-24+18+7=9$ متر

(8) لنفرض ان الكلفة الكلية لصنع X من وحدات سلعة ما
هي $C(X)=1500+30X+\frac{20}{X}$. جد الكلفة الحدية
واحسب الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة
50 وحدة ؟

الحل

$MC=C'(X)=30-\frac{20}{X^2}$ الكلفة الحدية

$MC=C'(50)=30-\frac{20}{2500}=\frac{1500-2}{2500}=\frac{7498}{250}=29{,}992$

الأستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة

(9) لتكن دالة الكلفة الكلية $C(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$
جد دالة الكلفة الحدية ، و دالة معدل الكلفة الكلية ؟

الحل

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$$

دالة الكلفة الحدية $MC=C'(x)=2\cdot\frac{1}{2}x-2=x-2$

لاستخراج معدل الكلفة الحدية نجد اولاً معدل الكلفة AC

$$AC=\frac{C(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2-2x+5}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}$$

دالة معدل الكلفة الكلية $AC=\frac{1}{2}x-2+5x^{-1}$

الاسئلة الاثرائية

(1) اذا كانت النقطة $(2,3)\in$ منحني الدالة $f(x)=x^2+ax+b$
والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $x-y=5$

(2) اذا كانت $f(x)=x^2-8x-3$ جد معادلة المماس عند $x=2$

(3) اذا كانت $f(x)=ax^2+bx$ وكان ميل المماس لمنحني الدالة
يساوي 4 عند $x=-1$ وكانت المشتقة الثانية $=(2)$ جد
قيمتي $a,b\in R$ ؟

(4) جد $f'(x)$ ، $f'(-2)$ اذا كانت $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ حيث $x\neq 0$

(5) جد النقطة التي تنتمي الى المنحني $f(x)=2x^2-5x+5$ حيث عندها
المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $2x-2y=1$

(9) لتكن دالة الكلفة الكلية $c(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$
جد دالة الكلفة الحدية ، ودالة معدل الكلفة الكلية ؟

الحل

$c(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+5$

دالة الكلفة الحدية $MC=c'(x)=2\cdot\frac{1}{2}x-2=x-2$

لا ستخراج معدل الكلفة الحدية نجد اولاً معدل الكلفة AC

$AC=\frac{c(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2-2x+5}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{5}{x}$

دالة معدل الكلفة الكلية $AC=\frac{1}{2}x-2+5x^{-1}$

98

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

الاسئلة الاثرائية

(1) اذا كانت النقطة $(2,3)\in$ منحني الدالة $f(x)=x^2+ax+b$
والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $x-y=5$

(2) اذا كانت $f(x)=x^2-8x-3$ جد معادلة المماس عند $x=2$

(3) اذا كانت $f(x)=ax^2+bx$ وكان ميل المماس لمنحني الدالة
يساوي 4 عند $x=-1$ وكانت المشتقة الثانية $=(2)$ جد
قيمتي $a,b\in R$ ؟

(4) جد $f'(x)$ ، $f'(-2)$ اذا كانت $f(x)=\frac{2x+3}{x}$ حيث $x\neq0$

(5) جد النقطة التي تنتمي الى المنحني $f(x)=2x^2-3x+5$ حيث عندها
المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $2x-2y=1$

تطبيقات على المشتقة

* ايجاد مناطق التزايد ومناطق التناقص والنقاط الحرجة ونقاط النهايات العظمى المحلية ونقاط النهايات الصغرى المحلية من المشتقة الاولى للدالة

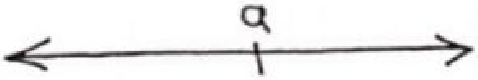
خطوات الحل

(1) نجد المشتقة الاولى — (1) $f'(x)$

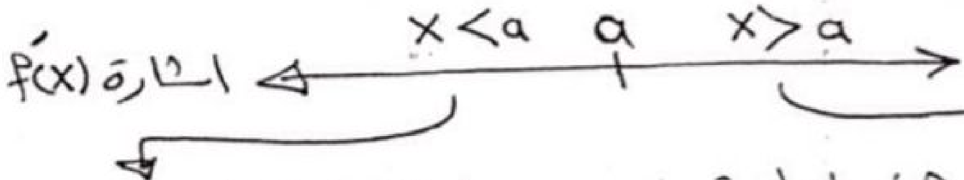
(2) نساويها للصفر — (2) $f'(x)=0$

(3) نستخرج قيم x — (3) $x=a$

(4) نمثل قيم x على خط الاعداد

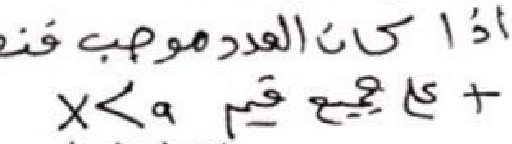


(5) نختبر اشارة $f'(x)$ وذلك

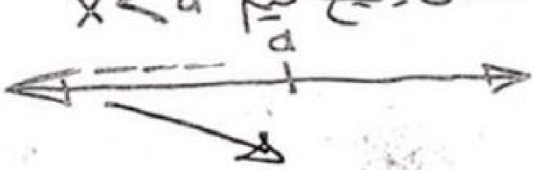


لاختبار اشارة هذه المنطقة نختار عدد اصغر من a ونعوضه في المشتقة الاولى $f'(a)$

اذا كان العدد موجب فنضع + على جميع قيم $x<a$

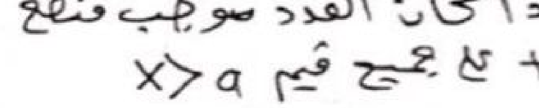


اذا كان العدد سالب فنضع - على جميع قيم $x<a$

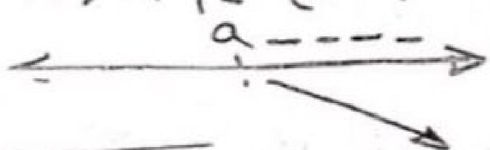


لاختبار اشارة هذه المنطقة نختار عدد اكبر من a ونعوضه في المشتقة الاولى $f'(a)$

اذا كان العدد موجب فنضع + على جميع قيم $x>a$



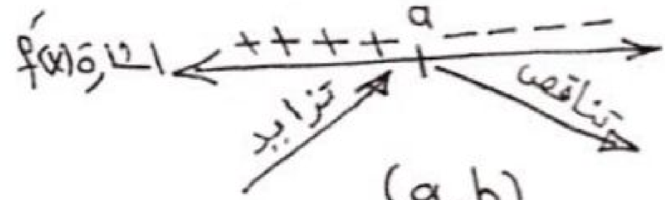
اذا كان العدد سالب فنضع - على جميع قيم $x>a$



(نلاحظ) المناطق الموجبة مناطق تزايد يرمز لها ↗

المناطق السالبة مناطق تناقص يرمز لها ↘

لمعرفة نوع النقاط (a,b) تعتمد على اشارة $f'(x)$



(a,b)

نقطة نهاية عظمى محلية

بشكل رقم ٨

حيث نعوض a في الدالة الاصلية لاستخراج b

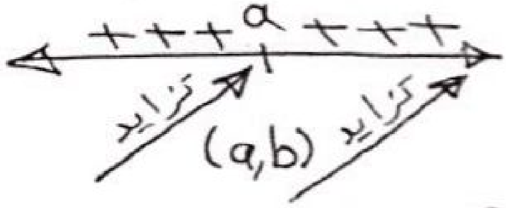
(a,b)

نقطة نهاية صغرى محلية

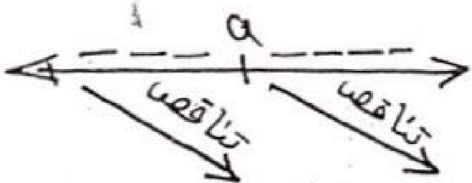
بشكل رقم ٧

نعوض قيم a في الدالة الاصلية لاستخراج b

100



مجرد نقطة حرجة



(a,b)

مجرد نقطة حرجة

نلاحظ

(1) منطقة يعني نعوض في المشتقة

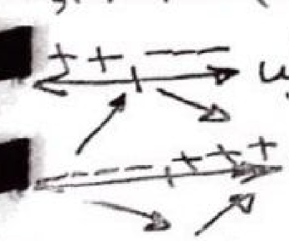
نقطة يعني نعوض في الدالة الاصلية

2) كل نقطة حرجة هي نقطة نهاية عظمى او صغرى ولكن كل نقطة نهاية عظمى او صغرى هي نقطة حرجة

(3) نقطة حرجة (لا تتغير اشارة المشتقة الاولى)

نقطة نهاية عظمى (تتغير الاشارة من موجب الى السالب

نقطة نهاية صغرى (تتغير الاشارة من سالب الى موجب



الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة

مثال 1 جد ان وجدت مناطق التزايد ومناطق التناقص والنقاط الحرجة ونقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال

(1) $f(x)=x^2-4x+1$

الحل

$f'(x)=2x-4 \longrightarrow 2x-4=0 \longrightarrow 2x=4 \longrightarrow x=2$

$f'(x)$: $- - - - - \; 2 \; + + + + +$

تناقص ، تزايد

$(2,y)$ نقطة نهاية صغرى محلية

شرح يرطلوب في الحل نختار عدد اصغر من 2 مثل 1 نعوضه في المشتقة الاولى

$f'(x)=2x-4$
$=2(1)-4=2-4$
$=-2$

شرح يرطلوب نختار عدد اكبر من 2 مثل 3 نعوضه في المشتقة الاولى

$f'(x)=2x-4$
$=2(3)-4$
$=6-4$
$=2=+2$

اكبر

مناطق التزايد $\{x: x\in R, x>2\}$

مناطق التناقص $\{x: x\in R, x<2\}$

اصغر

لايجاد y نعوض 2 في الدالة الاصلية

$f(x)=x^2-4x+1$

101 $f(2)=(2)^2-4(2)+1=4-8+1=-3$

$\therefore$ $(2,-3)$ نقطة نهاية صغرى محلية

---

(2) $f(x)=x^3-3x+6$

الحل

$f'(x)=3x^2-3 \longrightarrow 3x^2-3=0 \longrightarrow 3x^2=3 \xrightarrow{\div 3}$

$x^2=1 \longrightarrow x=\mp 1$

$+ + + \; -1 \; - - - - - - \; +1 \; + + + +$

تزايد ، تناقص ، تزايد

$(-1,y)$ نقطة نهاية عظمى

$(1,y)$ نقطة نهاية صغرى

مناطق التزايد

① $\{x: x\in R, x>1\}$

② $\{x: x\in R, x<-1\}$

مناطق التناقص

$(-1,1)$ الفترة المفتوحة

الأستاذ سعد العبيدي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

عندما $x=1$ نعوض في الدالة الاصلية لاستخراج y

$f(x)=x^3-3x+6 \rightarrow f(1)=(1)^3-3(1)+6=1-3+6$

$\therefore y=4 \rightarrow (1,4)$ نقطة نهاية صغرى محلية

تم معرفتها من خلال خط الاعداد

$+ + + \quad - - - \quad + + +$ $(1,4)$

عندما $x=-1 \Leftarrow f(-1)=(-1)^3-3(-1)+6=-1+3+6$

$y=8 \rightarrow (-1,8)$ نقطة نهاية عظمى محلية

من خلال خط الاعداد

$+ + + \quad - - - \quad + + +$ $(-1,8)$

---

(3) $f(x)=(2-x)^3$

الحل

$f'(x)=3(2-x)^2 \cdot -1=-3(2-x)^2 \rightarrow -3(2-x)^2=0$

مشتقة داخل القوس

$\div 3 \rightarrow (2-x)^2=0 \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} 2-x=0 \rightarrow x=2$ (102)

مناطق التناقص

(1) $\{x : x\in R, x>2\}$

(2) $\{x : x\in R, x<2\}$

$x<2 \quad 2 \quad x>2$

$- - - - \quad - - - -$

$(2,y)$

مجرد نقطة حرجة

عندما $x=2 \leftarrow f(x)=(2-x)^3=(2-2)^3=0$

$(2,0)$ مجرد نقطة حرجة

---

(4) $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$

الحل

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$3x^2-6x-9=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

$x<-1 \quad (-1,3) \quad x>3$

$+ + + + + \quad -1 \quad - - - - - \quad 3 \quad + + + + +$ اشارة $f'(x)$

تزايد تناقص تزايد

الأستاذ ... العبودي
إعدادية جزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

مناطق التزايد (1) $\{x : x \in R , x > 3\}$

(2) $\{x : x \in R , x < -1\}$

مناطق التناقص $(-1,3)$

عندما $x=3 \leftarrow$ $f(x)=x^3-3x^2-9x+7=(3)^3-3(3)^2-9(3)+7$

$=27-27-27+7=-20$

نقطة نهاية صغرى محلية $\therefore (3,-20)$

عندما $x=-1 \leftarrow$ $f(-1)=-1-3+9+7=12$

نقطة نهاية عظمى محلية $(-1,12)$

---

(5) $f(x)=x^4-2x^2+1$

الحل

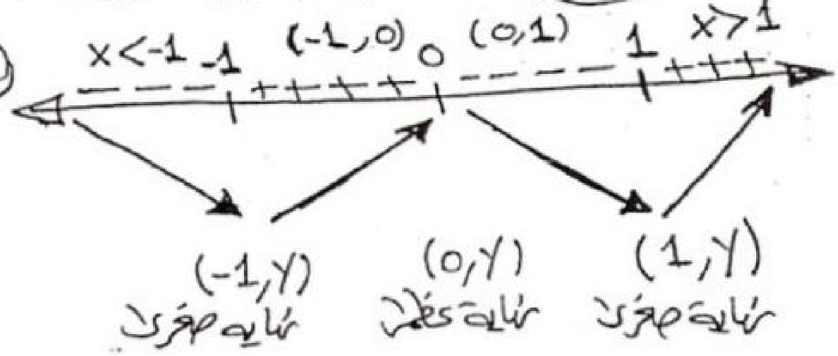
$f'(x)=4x^3-4x \rightarrow 4x^3-4x=0 \xrightarrow{\div 4} x^3-x=0$

عامل مشترك

$x(x^2-1)=0 \rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=0$

$x=1$, $x=-1$

103)



مناطق التزايد (1) $\{x : x > 1\}$

(2) $(-1,0)$

مناطق التناقص

(1) $\{x : x < -1\}$

(2) $(0,1)$

عندما $x=1 \leftarrow$ $f(x)=x^4-2x^2+1=1-2+1=0$

$(1,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

عندما $x=0 \leftarrow$ $f(0)=0-0+1=1$

$(0,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية

عندما $x=-1 \leftarrow$ $f(-1)=0$ لأن الدالة زوجية

$(-1,0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

(41)/3

(6) $f(x)=x^3(-4+x)$

الحل

$f(x)=-4x^3+x^4 \longrightarrow f'(x)=-12x^2+4x^3$

$-12x^2+4x^3=0 \xrightarrow{\div 4} -3x^2+x^3=0 \xrightarrow{\text{عامل مشترك}} x^2(-3+x)=0$

$x^2=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$ أو $-3+x=0 \longrightarrow \boxed{x=3}$

$x<0$ $(0,3)$ 3 $x>3$

$(0,y)$ $(3,y)$

مناطق التزايد $\{x : x\in R : x>3\}$

مناطق التناقص $(1)\{x : x<0\}$

$(2)\ (0,3)$

عندما $x=0 \xrightarrow[\text{الدالة الاصلية}]{\text{نعوض في}} f(0)=0(-4+0)=0$

$\therefore$ $(0,0)$ نجد نقطة حرجة

104

عندما $x=3 \longrightarrow f(3)=(3)^3[-4+3]$

$=27(-1)=-27 \longrightarrow (3,-27)$ نقطة نهاية صغرى محلية

(7) * اذا كانت $f(x)=x^3+ax+5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x=1$ جد قيمة (a) و بين نوع النهاية

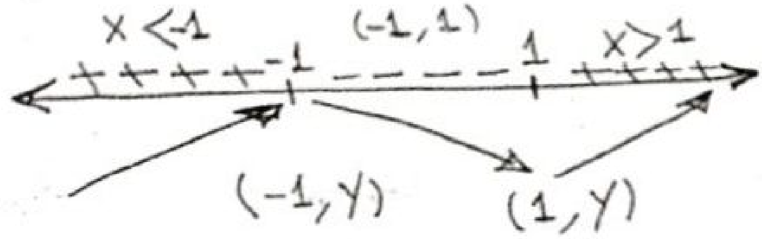
الحل $\because$ الدالة لها نقطة نهاية محلية عند $x=1 \Leftarrow$ نجد المشتقة الاولى ثم $=$ صفر ونعوض عن كل x بـ 1

$f'(x)=3x^2+a \longrightarrow 3x^2+a=0 \longrightarrow 3(1)^2+a=0$

$3+a=0 \longrightarrow \boxed{a=-3}$

$\therefore f(x)=x^3-3x+5 \longrightarrow f'(x)=3x^2-3=0$

$3x^2=3 \xrightarrow{\div 3} x^2=1 \longrightarrow x=\mp 1$



الدالة متزايدة في $(1)\{x : x \in R, x > 1\}$

$(2)\{x : x \in R, x < -1\}$

الدالة متناقصة في $(-1, 1)$

عندما $x = 1$ ← نعوض في الدالة الأصلية

$f(x) = x^3 - 3x + 5 \rightarrow f(1) = 1 - 3 + 5 = -2 + 5 = 3$

∴ $(1, 3)$ نقطة نهاية صغرى محلية

عندما $x = -1$ ← $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = -1 + 3 + 5$

$f(-1) = 7 \rightarrow (-1, 7)$ نقطة نهاية عظمى

(8) اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx$ وكانت $f(x)$ تملك نهاية محلية عند النقطة $(1, -2)$ فما قيمة $a, b \in R$ وما نوع هذه النهاية

(105)

الحل

يوجد مجهولان لذلك نحتاج الى معادلتان

المعادلة الاولى ⇐ ∵ النقطة $(1, -2) \in$ للدالة فهي تحقق معادلتها

$f(x) = ax^3 + bx$

$-2 = a(1)^3 + b(1) \rightarrow \boxed{-2 = a + b} \cdots 1$

المعادلة الثانية ⇐ نشتق ونعوض عن $x = 1$ ⇐

$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow 3a(1)^2 + b = 0$

∴ $\boxed{3a + b = 0} \cdots 2$

$-2 = a + b \cdots 1$

$0 = \mp 3a \mp b \cdots 2$

بالطرح

$2 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 1}$

نعوض $a = 1$ في معادلة (1) ← $-2 = 1 + b$

∴ $\boxed{b = -3}$

(43)/3

$a=1$ ، $b=-3$ ← نعوضها في

$f(x)=ax^3+bx$

$$\boxed{f(x)=x^3-3x}$$

$\therefore f'(x)=3x^2-3 \rightarrow 3x^2-3=0 \rightarrow 3x^2=3 \xrightarrow{\div 3} x^2=1$

$\therefore x=\mp 1$

$+ + + + + \;\; -1 \;\; - - - - - - \;\; +1 \;\; + + + + +$

$x<-1$ $\quad (-1,1) \quad$ $x>1$

$(-1,y)$ نهاية عظمى $\qquad$ $(1,y)$ نهاية صغرى

مناطق التزايد $(1)\{x : x>1\}$ $\quad (2)\{x : x<-1\}$

مناطق التناقص $(-1,1)$

عندما $x=1 \leftarrow$ $f(x)=x^3-3x=1-3=-2$

نوع النهاية المطلوبة $\boxed{(1,-2) \text{ نقطة نهاية صغرى محلية}}$

عندما $x=-1 \leftarrow$ $f(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=2$

$(-1,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

106

تمارين (3-4)

(1) جد نقطة النهايات العظمى أو الصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية :-

(a) $f(x)=x^4-1$

الحل

$f'(x)=4x^3 \rightarrow 4x^3=0 \xrightarrow{\div 4} x^3=0 \rightarrow x=0$

$x<0 \qquad 0 \qquad x>0$

$- - - - - \;\; 0 \;\; + + + + +$

$(0,y)$

مناطق التزايد $\{x : x>0\}$ مناطق التناقص $\{x : x<0\}$

عندما $x=0 \leftarrow$

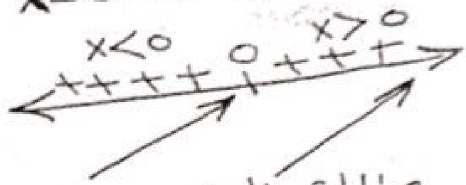
$f(0)=0-1=-1$

$\therefore$ $(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

(44)/3

(b) $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2 \longrightarrow 3x^2=0 \xrightarrow{\div 3} x^2=0 \longrightarrow x=0$



مناطق التزايد

$(1)\{x : x>0\}$ $(2)\{x : x<0\}$

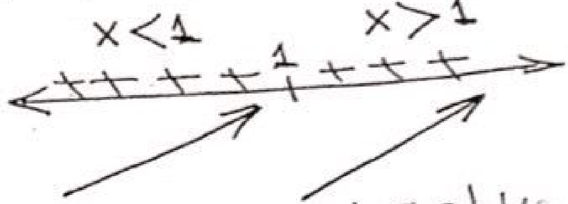
$x=0 \longrightarrow f(0)=0 \longrightarrow (0,0)$ مجرد نقطة حرجة

(c) $f(x)=(x-1)^3$

الحل

$f'(x)=3(x-1)^2\cdot 1 \longrightarrow 3(x-1)^2=0 \xrightarrow{\div 3} (x-1)^2=0$

$\therefore\ x-1=0 \longrightarrow x=1$



مناطق تزايد $(1)\{x : x>1\}$ مناطق تناقص لا توجد

$(2)\{x : x<1\}$

الأستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

$x=1 \longrightarrow f(1)=(1-1)^3 \longrightarrow f(1)=0$

$(1,0)$ مجرد نقطة حرجة

107)

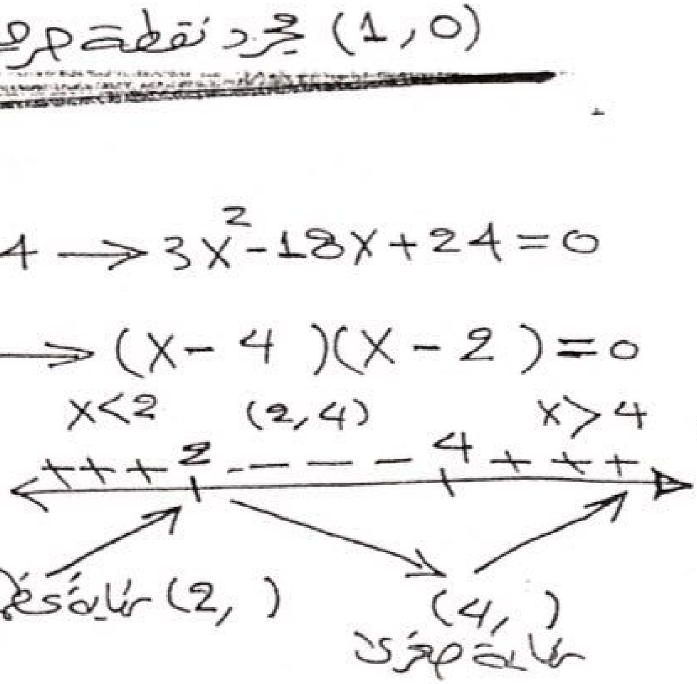
(d) $f(x)=x^3-9x^2+24x$

الحل

$f'(x)=3x^2-18x+24 \longrightarrow 3x^2-18x+24=0$

$\div 3 \longrightarrow x^2-6x+8=0 \longrightarrow (x-4)(x-2)=0$

$x=4$ أو $x=2$



مناطق التزايد $(1)\{x : x>4\}$ $(2)\{x : x<2\}$

مناطق التناقص $(2,4)$

(45)/3

$x=4 \rightarrow f(x)=x^3-9x^2+24x \rightarrow f(4)=(4)^3-9(4)^2+24(4)$

$=64-144+96=-80+96=16$ نقطة نهاية صغرى $(4,16)$

$x=2 \rightarrow f(2)=8-36+48=20$ نقطة نهاية عظمى $(2,20)$

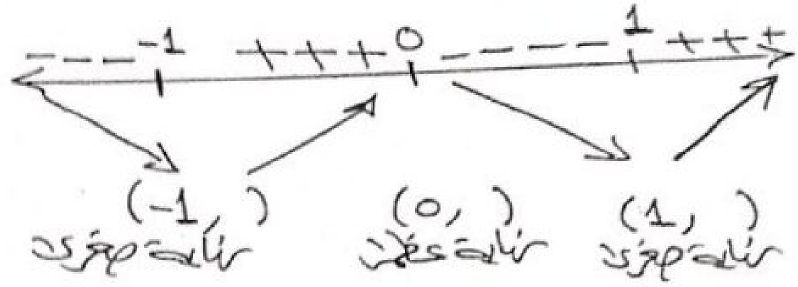
(e) $f(x)=x^4-2x^2-3$

الحل

$f'(x)=4x^3-4x \longrightarrow 4x^3-4x=0 \xrightarrow{\div 4} x^3-x=0$

تحليل $x(x^2-1)=0 \longrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \longrightarrow x=0 \quad x=1 \quad x=-1$

$f'(x)$ أشارة



عندما $x=1$ ← $f(1)=1-2-3=-4$ ⇐ $(1,-4)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$x=-1$ ← $f(-1)=-4$

نقطة نهاية صغرى محلية $(-1,-4)$

$x=0$ ← $f(0)=-3$ ← $(0,-3)$ نقطة نهاية عظمى محلية

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣٣٨٦

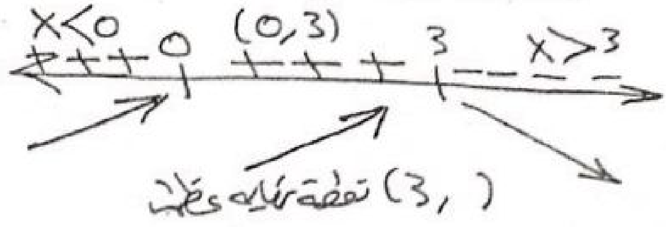
(f) $f(x)=5+4x^3-x^4$

الحل

$f'(x)=12x^2-4x^3 \longrightarrow 12x^2-4x^3=0 \quad \div 4 \rightarrow$

$3x^2-x^3=0 \longrightarrow x^2(3-x)=0 \longrightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{x=3}$

(1) $\{x : x<0\}$ مناطق التزايد



(2) $(0,3)$

$\{x : x>3\}$ مناطق التناقص

$x=3 \rightarrow f(3)=5+4(3)^3-(3)^4=5+4(27)-81=32$

$\therefore$ $(3,32)$ نقطة نهاية عظمى محلية

108

(46)/3

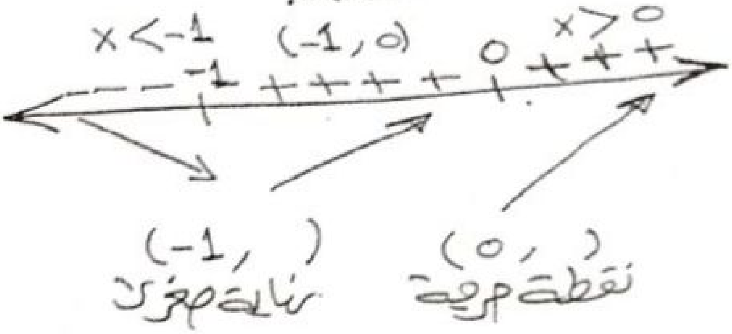
(9) $f(x)=3x^4+4x^3$

الحل

$f'(x)=12x^3+12x^2 \longrightarrow 12x^3+12x^2=0 \xrightarrow{\div 12}$

$x^3+x^2=0 \longrightarrow x^2(x+1)=0 \longrightarrow x^2=0 \longrightarrow x=0$

$x+1=0 \longrightarrow x=-1$



مناطق التزايد $(1)\{x: x>0\}$ $(2)\ (-1,0)$

مناطق التناقص $\{x: x<-1\}$

$x=0 \longrightarrow f(0)=0 \longrightarrow (0,0)$ نقطة حرجة

$x=-1 \longrightarrow f(-1)=3(-1)^4+4(-1)^3 \longrightarrow f(-1)=3-4=-1$

$(-1,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

109)

(2) اذا علمت ان النقطة $(2,1)$ هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x)=a+(x-b)^2$ جد قيمة كل من $a,b\in R$

الحل

$\because (2,1)\in f(x)=a+(x-b)^2$

$1=a+(2-b)^2 \longrightarrow 1=a+4-4b+b^2$

$b^2-4b+a+3=0 \quad \ldots(1)$

$f'(x)=2(x-b)=2x-2b \Rightarrow 2x-2b=0 \div 2$

$x-b=0 \longrightarrow b=x \longrightarrow b=2 \quad \ldots 2$

نعوض (2) في (1) ينتج

$4-8+a+3=0 \longrightarrow -1+a=0 \longrightarrow a=1$

الأستاذ سعد العبودي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(47)/3

(3) اذا كانت النقطة (1,4) نقطة حرجة للدالة $f(x)=3+ax+bx^2$ فما قيمة $a,b \in R$ وما نوع النقطة الحرجة

الحل

$f'(x)=a+2bx \rightarrow a+2b(1)=0$

$\therefore \boxed{a+2b=0}$ 1

$(1,4) \in f(x)=3+ax+bx^2 \rightarrow 4=3+a(1)+b(1)^2$

$4=3+a+b \rightarrow \boxed{a+b=1}$ 2

$a+2b=0$ 1

$\mp a \mp b=\mp 1$ 2

بالطرح

$\boxed{b=-1}$

نعوض $b=-1$ في معادلة (1) ينتج

$a+2(-1)=0 \rightarrow a-2=0 \rightarrow \boxed{a=2}$

أكمل الحل

110

اثرائيات

(1) جد ان وجدت النقاط الحرجة ونقاط النهايات العظمى والصغرى لها

(1) $f(x)=x^3-3x$ (2) $f(x)=(x-2)^2+4$

(3) $f(x)=x^4-8x^2+17$ (3) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

(2) اذا كانت $f(x)=x^3-ax-4$ لها نقطة نهاية محلية عند $x=-1$ (1) جد قيمة a (2) بين نوع النهاية المحلية

(3) اذا كانت $f(x)=ax^2+bx$ وكانت النقطة $(-1,-3)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية للدالة . جد قيمة $a,b \in R$

(4) اذا كانت $f(x)=x^2+ax+3$ للدالة نقطة نهاية صغرى محلية عند $x=2$ ① جد قيمة a ② جد نقطة النهاية الصغرى المحلية

إتعب إتعب إتعب

الأستاذ ... العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(418)/3

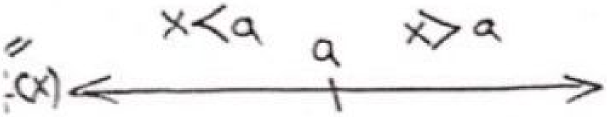
*إيجاد مناطق التقعر ومناطق التحدب ونقاط الانقلاب من المشتقة الثانية للدالة

خطوات الحل

(1) نجد $f'(x)$ ثم $f''(x)$

(2) $f''(x)=0$ نستخرج قيم x

(3) نمثل قيم x على خط الاعداد



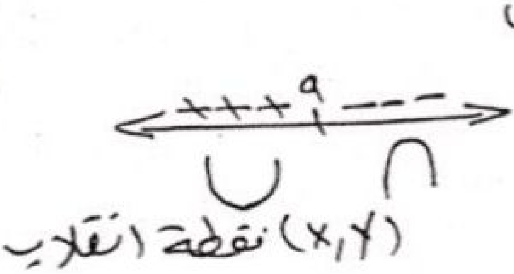
(4) نختبر اشارة المشتقة الثانية . نلاحظ

المناطق الموجبة مناطق تقعر $\cup$

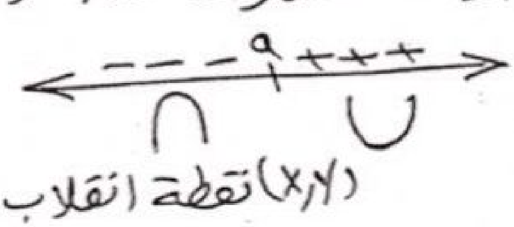
المناطق السالبة مناطق تحدب $\cap$

(5) (x,y) نقطة انقلاب : هي النقطة التي تتحول فيها اشارة المشتقة الثانية من سالب الى موجب وبالعكس او من تقعر الى تحدب وبالعكس

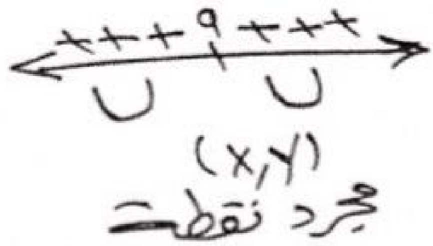
111)



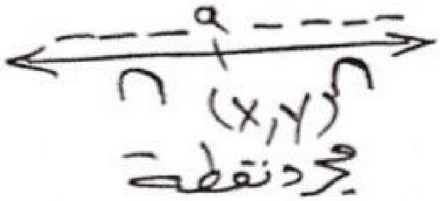
أو



(x,y) مجرد نقطة : اذا لم تتغير اشارة المشتقة الثانية



أو



مثال 1 جد نقاط الانقلاب (ان وجدت) للدالة

$f(x)=x^2-4x+2$

الحل

$f'(x)=2x-4 \longrightarrow f''(x)=2 \neq 0$

المنطقة موجبة ← منطقة تقعر فقط

لا توجد نقاط انقلاب

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(49)/3

(2) جد نقاط الانقلاب للدالة $f(x)=x^3-3x+2$

__الحل__

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x \longrightarrow 6x=0 \longrightarrow x=0$

اشارة $f''(x)$: $x<0$ (- - - -) 0 (+ + + +) $x>0$

$\cap$ $\cup$

نقطة انقلاب $(0,2)$

شرح

نختار عدد اصغر من 0 مثل -1 نعوضه في المشتقة الثانية

$f''(x)=6x$

$=-6$

نختار عدد اكبر من 0 مثل 1 نعوضه في المشتقة الثانية

$f''(x)=6x=6$

عندما $x=0 \longrightarrow$ نعوض في الدالة الاصلية $f(x)=x^3-3x+2$

$f(0)=0-3(0)+2=2 \longrightarrow (0,2)$ نقطة انقلاب

تمارين (3-5)

112

لكل من الدوال الاتية عين ان وجدت نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب :

(1) $f(x)=2x^2-4x+5$

__الحل__

$f'(x)=4x-4 \longrightarrow f''(x)=4>0$

المشتقة الثانية موجبة $\longleftarrow$ المنطقة تقعر فقط

$4\neq 0 \longleftarrow$ لا توجد نقاط انقلاب

الأستاذ سعد العبيدي
اعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(2) $f(x)=3x-x^3$

$f'(x)=3-3x^2 \longrightarrow f''(x)=-6x \longrightarrow -6x=0 \longrightarrow x=0$

اشارة $f''(x)$: $x<0$ (+ + + + +) 0 (- - - - -) $x>0$

$\cup$ $\cap$

$(0,\ )$

مناطق التقعر $\{x : x<0\}$ مناطق التحدب $\{x : x>0\}$

$x=0 \longrightarrow f(0)=0 \longrightarrow (0,0)$ نقطة انقلاب

50/3

(3) $f(x)=x^3-3x^2$

الحل

$f'(x)=3x^2-6x \longrightarrow f''(x)=6x-6 \longrightarrow f''(x)=0$

$6x-6=0 \quad \div 6 \longrightarrow x-1=0 \longrightarrow \boxed{x=1}$

$\{x: x>1\}$ مناطق التقعر

$\{x: x<1\}$ مناطق التحدب

$x<1$; $x>1$

$- - - - - \; 1 \; + + + +$

$\cap$ تحدب ; $\cup$ تقعر

$(1, \;)$ نقطة انقلاب

عندما $x=1 \longleftarrow$

$f(x)=x^3-3x^2 \rightarrow f(1)=(1)^3-3(1)^2$

$=1-3=-2$

$\therefore (1,-2)$ نقطة انقلاب

(113)

---

(4) $f(x)=x^5$

الحل

$f'(x)=5x^4 \longrightarrow f''(x)=20x^3 \longrightarrow 20x^3=0 \quad \div 20$

$x^3=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$

$x<0$; $x>0$

$- - - - \; 0 \; + + + +$

$\cap$; $\cup$

$(0, \;)$ نقطة انقلاب

مناطق التقعر $\{x: x\in R, x>0\}$ مناطق التحدب $\{x: x\in R, x<0\}$

عندما $x=0 \longleftarrow$

$f(x)=x^5 \rightarrow f(0)=0$

نقطة انقلاب $(0,0)$

الأستاذ سعد الجبرودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(5) $f(x)=(x-2)^3+3$

الحل

$f'(x)=3(x-2)^2 \longrightarrow f''(x)=6(x-2)$

$f''=0 \rightarrow 6(x-2)=0 \xrightarrow{\div 6} x-2=0 \longrightarrow \boxed{x=2}$

$\{x: x\in R, x>2\}$ مناطق التقعر

$\{x: x\in R, x<2\}$ مناطق التحدب

$x<2$; $x>2$

$- - - \; 2 \; + + + +$

$\cap$; $\cup$

$x=2 \rightarrow f(2)=3 \rightarrow (2,3) \longrightarrow$ نقطة انقلاب $(2, \;)$

51/3

(6) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$

الحل

$f'(x)=\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}x^3-\cancel{2}\cdot\frac{3}{\cancel{2}}x=x^3-3x$

$f''(x)=3x^2-3 \longrightarrow 3x^2-3=0 \xrightarrow{\div 3} x^2-1=0$

$x^2=1 \longrightarrow x=\mp 1$

$x<-1$ $(-1,1)$ $x>1$

$f''(x)$ +++ -1 ----- 1 +++

نقطة انقلاب $(-1,\ )$ $(1,\ )$ نقطة انقلاب

مناطق التقعر $\{x: x\in R, x>1\}$ ① $\{x: x\in R, x<-1\}$ ②

مناطق التحدب $(-1,1)$

$x=1 \longrightarrow f(1)=\frac{1}{4}(1)^4-\frac{3}{2}(1)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}=\frac{-5}{4}$

$(1,\frac{-5}{4})$ نقطة انقلاب

$x=-1 \longrightarrow f(-1)=\frac{-5}{4}$ الدالة زوجية $(-1,\frac{-5}{4})$ نقطة انقلاب

(7) $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

الحل

$f'(x)=3x^2+6x+3 \longrightarrow f''(x)=6x+6$

$6x+6=0 \longrightarrow 6x=-6 \longrightarrow x=-1$

$x<-1$ $x>-1$

----- -1 ++++

تحدب تقعر

مناطق التقعر $\{x: x>-1\}$

مناطق التحدب $\{x: x<-1\}$

$(-1,\ )$ نقطة انقلاب

$x=-1 \longrightarrow f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$

$=-1+3-3+1=0 \longrightarrow (-1,0)$ نقطة انقلاب

114

52/3

الثرائيات

(1) جد نقاط الانقلاب لكل من

(1) $f(x)=6x-3x^3$

(2) $f(x)=x^3(x-4)$

(3) $f(x)=x^3-3x^2$

(2) اذا علم ان $f(x)=x^3-ax^2-bx$ دالة لها نقطة انقلاب عند $x=-2$ وكان ميل المماس للمنحني $f(x)$ عند نقطة انقلابه يوازي المستقيم الذي معادلته $y+4x+1=0$ جد قيمتي $a,b\in R$

(3) اذا كانت الدالة $f(x)=x^3+bx^2-9x+7$ تملك نقطة انقلاب عند $x=1$ جد قيمة b ثم جد نقطة الانقلاب ؟

(4) جد مناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب لمنحني الدالة

115)

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+1$

من طرق النجاح

* تخصيص وقت يومي للقراءة والكتابة
* الصبر
* الرضا
* الدعاء
* درجات الامتحان هي الحكم
* كثرة الاسئلة

سعد ... الجبوري
أ. زكريا

٥٨

رسم الدوال

خطوات رسم الدالة

(1) نجد نقاط التقاطع مع المحورين (إن امكن)

(a) مع السينات نفرض $y=0$ نستخرج قيم x $(x,0)$

(b) مع الصادات نفرض $x=0$ نستخرج قيم y $(0,y)$

(2) نجد مناطق التزايد ومناطق التناقص ونقاط النهايات العظمى والصغرى المحلية والنقاط الحرجة (إن وجدت) من المشتقة الاولى للدالة

(3) نجد مناطق التقعر ومناطق التحدب ونقاط الانقلاب من المشتقة الثانية للدالة

(4) نجد بعض النقاط الاضافية (حسب الحاجة)

116

مثال 1 ارسم منحني الدالة $f(x)=x^2+4x+3$

الحل (1) نقاط التقاطع

$x=0 \rightarrow f(0)=(0)^2+4(0)+3=3 \rightarrow$ $\boxed{\text{مع الصادات } (0,3)}$

$y=f(x)=0 \rightarrow x^2+4x+3=0 \rightarrow (x+3)(x+1)=0$

اما $x=-3$ أو $x=-1 \rightarrow$ $\boxed{\text{مع السينات } (-1,0),(-3,0)}$

(2)

$f'(x)=2x+4$

$2x+4=0 \rightarrow 2x=-4 \xrightarrow{2\div} x=-2$

$x<-2$ -2 $x>-2$

$- - - - \quad | \quad + + +$

مناطق التزايد $\{x: x\in R, x>-2\}$

مناطق التناقص $\{x: x\in R, x<-2\}$

$x=-2 \longrightarrow$ نعوض في الدالة الاصلية

$f(-2)=4-8+3=-1$

$(-2,-1)$ نهاية صغرى

(54) (3)

$f'(x) = 2x+4 \rightarrow f''(x) = 2 > 0$ ∪

المنطقة منطقة تقعر فقط

(4) نلخص النقاط التي تم استخراجها

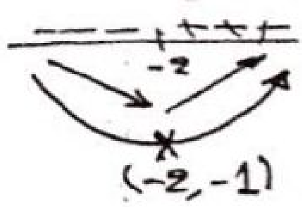
X	$y=f(x)$	
0	3	نقطة تقاطع (0,3)
-1	0	نقطة تقاطع (-1,0)
-3	0	نقطة تقاطع (-3,0)
-2	-1	نهاية صغرى (-2,-1)

نعين هذه النقاط على المحورين الاحداثيين

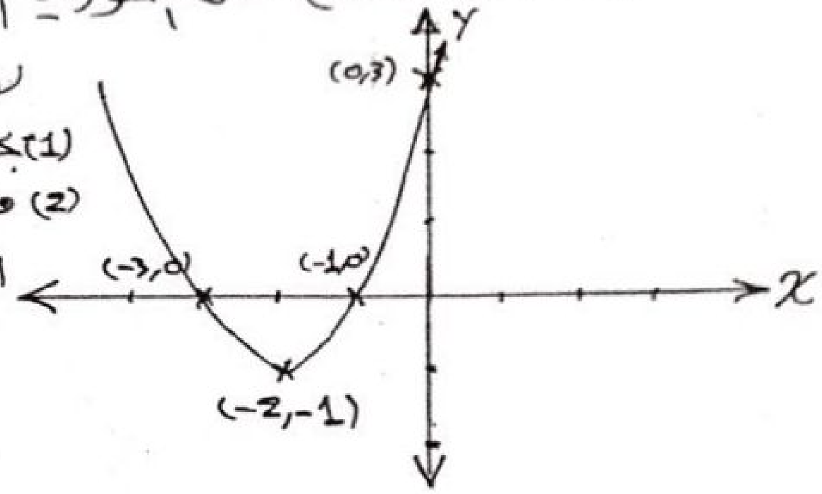
لاحظ ان الرسم

(1) يجب ان يمر بالنقاط السابقة

(2) من خط الاعداد في المشتقة الاولى



117) ان الرسم



(3) (-2,-1) نقطة نهاية صغرى محلية. اي ان الرسم يصل الى اقل مستوى له في هذه النقطة. ولا ينزل تحتها في هذه المنطقة

(4) من المشتقة الثانية المنطقة تقعر فقط ∪ وهذا واضح في الرسم

(5) لا توجد نقاط انقلاب يعني ان الرسم لا ينقلب من تقعر الى تحدب أو بالعكس

تذكر ولا تنسى

إن جميع سنوات الدراسة تعتمد على هذه السنة الدراسية ⟸ تحدد مستقبلك

مثال 2 ارسم منحني الدالة $f(x)=x^3-3x$

الحل

① نقاط التقاطع

$x=0 \to f(0)=(0)^3-3(0)$
$=0-0=0$

مع الصادات $(0,0)$

$y=f(x)=0 \to x^3-3x=0 \xrightarrow{\text{عامل مشترك}} x(x^2-3)=0$

$x=0 \;,\; x^2-3=0 \to x^2=3 \to x=\mp\sqrt{3}$

مع السينات $(0,0),(\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0)$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

② $f'(x)=3x^2-3 \to 3x^2-3=0 \div 3 \to$

$x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\mp 1$

$x<-1 \qquad (-1,1) \qquad x>1$

اشارة المشتقة الاولى $+++ \;\; -1 \;\; --- \;\; +1 \;\; +++$

تزايد   تناقص   تزايد

$(-1,2)$ نهاية عظمى

$(1,-2)$ نهاية صغرى

سيكون الرسم بهذا الشكل 118

مناطق التزايد $(1)\{x: x\in R, x>1\}$

$(2)\{x: x\in R, x<-1\}$

مناطق التناقص $(-1,1)$

$x=1 \to f(1)=1-3=-2 \to (1,-2)$ نهاية صغرى

$x=-1 \to f(-1)=-1+3=2 \to (-1,2)$ نهاية عظمى

③ $f''(x)=6x$

$6x=0 \to x=0$

$x<0 \qquad 0 \qquad x>0$

$--- \;\; 0 \;\; +++$

تحدب   تقعر

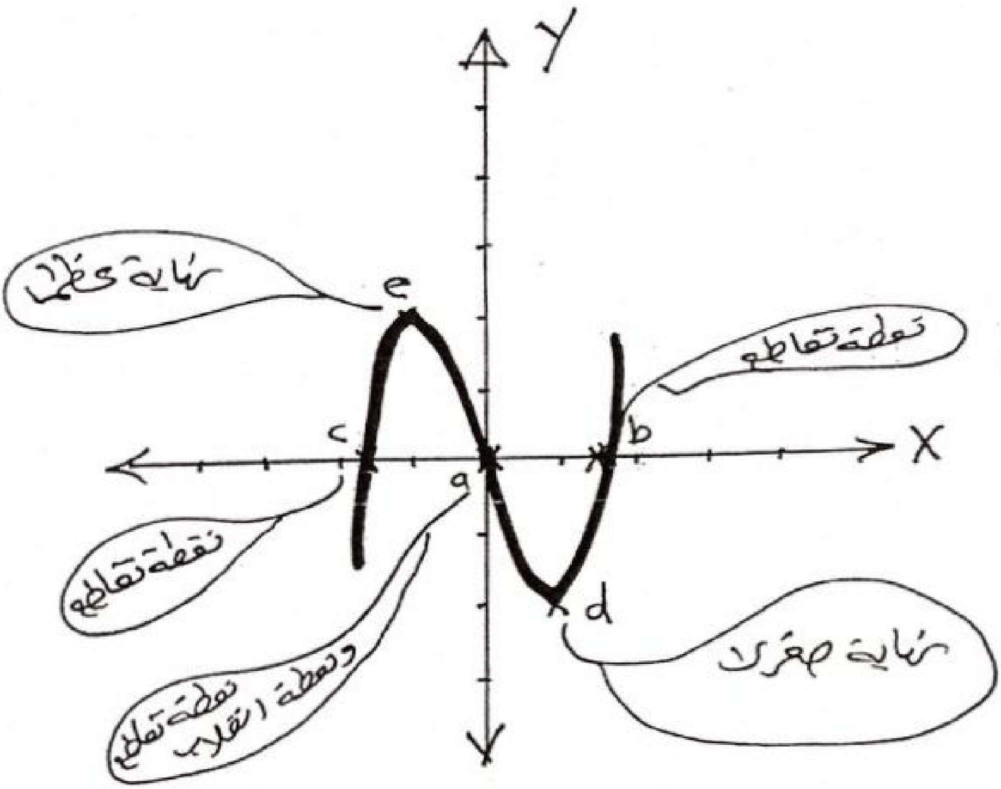
مناطق التقعر $\{x: x\in R, x>0\}$ مناطق التحدب $\{x: x\in R, x<0\}$

$x=0 \to y=0 \to (0,0)$ نقطة انقلاب

56/3

④

x	$y = f(x) = x^3 - 3x$		
0	0	$a(0,0)$	نقطة انقلاب
$\sqrt{3}$	0	$b(\sqrt{3},0)$	نقاط تقاطع
$-\sqrt{3}$	0	$c(-\sqrt{3},0)$	
1	-2	$d(1,-2)$	نقطة نهاية صغرى
-1	2	$e(-1,2)$	نقطة نهاية عظمى



اعلم ان هذه العلامات هي للتوضيح والشرح وليس ضمن الرسم.

هل تريد الوصول الى الكلية

نعم

الامتحان اليومي + القراءة اليومية + ترك اللهو + الاجتهاد + متابعة الدرس + الصبر

كلا

الراحة + ترك القراءة + الاعذار المتواصلة

مثال 3 ارسم منحني الدالة $f(x)=(x+1)^3-1$

الحل

(1) تقاطع التقاطع $x=0 \rightarrow f(0)=(0+1)^3-1=1-1=0$

مع الصادات $(0,0)$

مع السينات طرفين

$y=f(x)=0 \rightarrow 0=(x+1)^3-1 \rightarrow (x+1)^3=1 \rightarrow x+1=1$

مع السينات $x=0 \rightarrow (0,0)$

(2) $f'(x)=3(x+1)^2 \longrightarrow 3(x+1)^2=0 \xrightarrow{\div 3} (x+1)^2=0$

$\therefore x+1=0 \longrightarrow x=-1$

$x<-1 \qquad -1 \qquad x>-1$

$+ + + + + \quad + + + +$

مناطق التزايد (1) $\{x: x\in R, x>-1\}$

(2) $\{x: x\in R, x<-1\}$

(3) $f''(x)=6(x+1) \longrightarrow 6(x+1)=0 \xrightarrow{\div 6} x+1=0$

$\therefore x=-1$

$x<-1 \qquad -1 \qquad x>-1$

اشارة $f''(x)$ $\quad - - - - \quad + + + + +$

نقطة انقلاب $(-1, \;)$

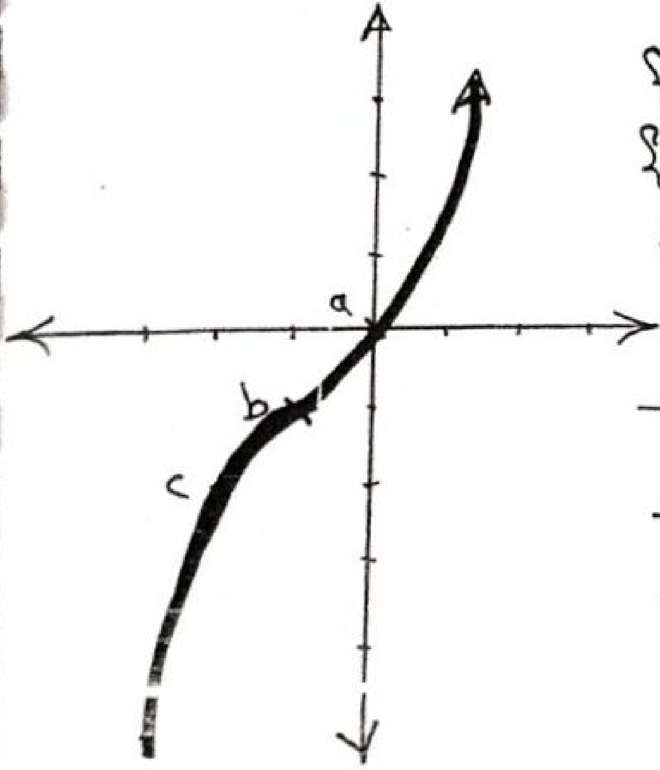
مناطق التقعر $\{x, x\in R, x>-1\}$

مناطق التحدب $\{x: x\in R, x<-1\}$

$x=-1 \rightarrow f(-1)=(-1+1)^3-1$

$=-1$

نقطة انقلاب $(-1,-1)$



X	Y		
0	0	نقطة تقاطع	a
-1	-1	نقطة انقلاب	b
-2	-2	نقطة اضافية	c

م. سداد سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(58)/3

تمارين (3-6)

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدوال

(1) $f(x) = 4 - 6x - x^2$

الحل

(1) $x = 0 \rightarrow f(0) = 4 - 6(0) - (0)^2 = 4 \rightarrow (0, 4)$ مع الصادات

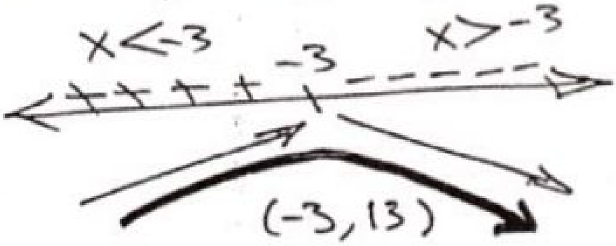
$y = 0 \rightarrow 4 - 6x - x^2 = 0 \rightarrow x = \mp\sqrt{13} - 3$ تم استخدام الرسم التكامل

$\therefore (\sqrt{13} - 3, 0)$ أو $(-\sqrt{13} - 3, 0)$ مع السينات

(2) $f'(x) = -6 - 2x \rightarrow -6 = 2x \rightarrow x = -3$

$\{x : x \in R, x < -3\}$ مناطق التزايد

$\{x : x \in R, x > -3\}$ مناطق التناقص



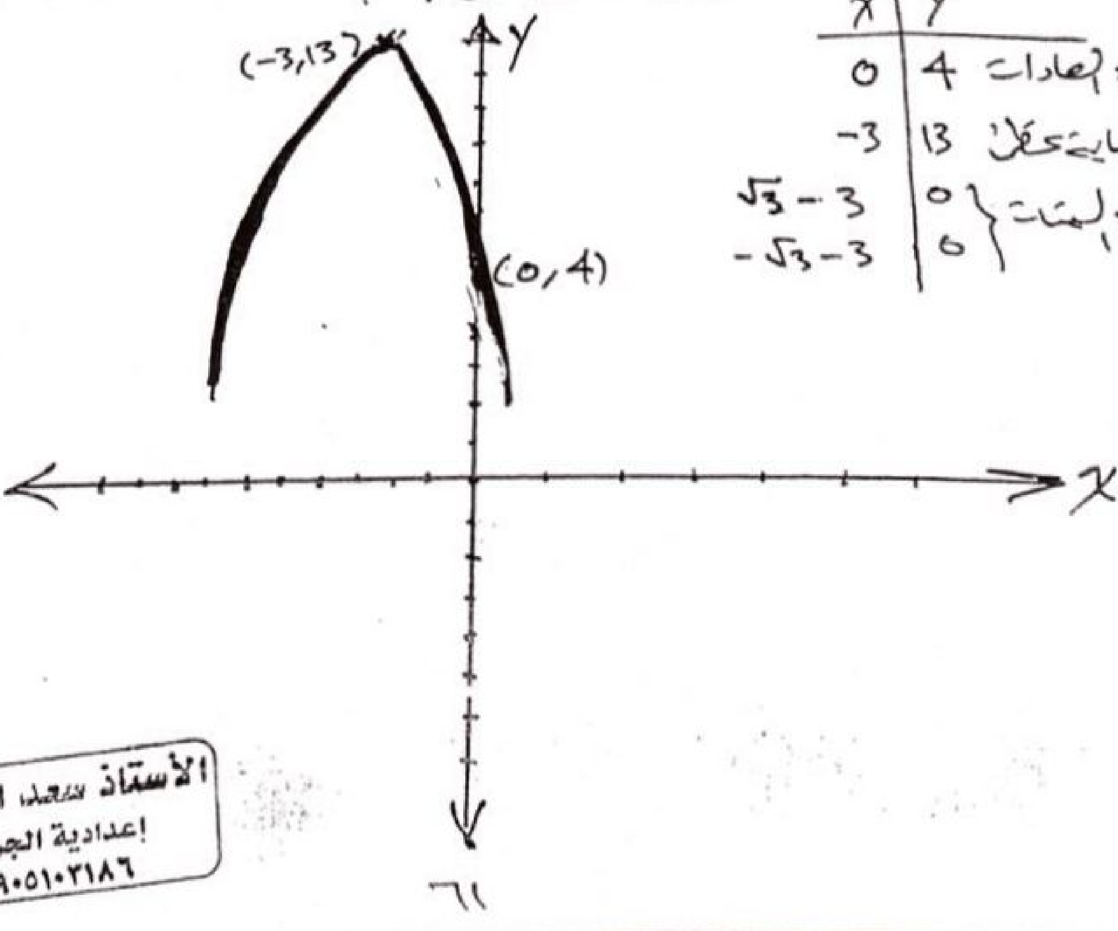
121

$x = -3 \rightarrow f(-3) = 4 - 6(-3) - (-3)^2$

$= 4 + 18 - 9 = 13 \rightarrow (-3, 13)$ نهاية عظمى

(3) $f''(x) = -2$ المنطقة محدبة $\cap$

x	y	
0	4	مع الصادات
-3	13	نهاية عظمى
$\sqrt{3} - 3$	0	مع السينات
$-\sqrt{3} - 3$	0	



الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

59/3

(2) $f(x)=3x-x^3$

الحل

(1) $x=0 \rightarrow f(0)=3(0)-(0)^3=0 \rightarrow$ (0,0) مع الصادات

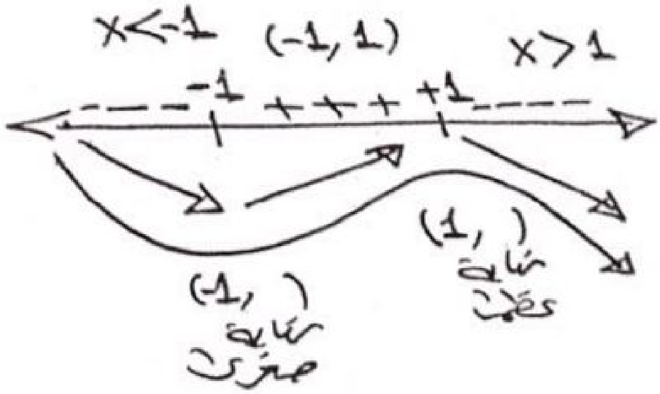
$y=f(x)=0 \rightarrow 3x-x^3=0 \rightarrow x(3-x^2)=0 \rightarrow$

$x=0\ ,\ 3=x^2 \rightarrow x=\mp\sqrt{3}$

(0,0) , $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$ مع السينات

(2) $f'(x)=3-3x^2 \rightarrow 3-3x^2=0 \rightarrow 3x^2=3 \rightarrow x^2=1$

$\therefore x=\mp 1$



مناطق التزايد (-1,1)

مناطق التناقص

(1) $\{x: x>1\}$

(2) $\{x: x<-1\}$

122

عندما $x=1$ ←

$f(1)=3-1=2$

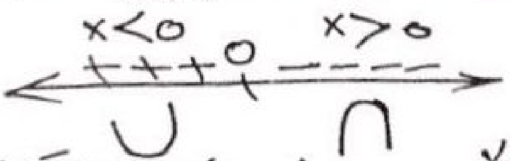
(1,2) نهاية عظمى

عندما $x=-1$ ←

$f(-1)=-3-(-1)=-3+1=-2$

(-1,-2) نهاية صغرى محلية

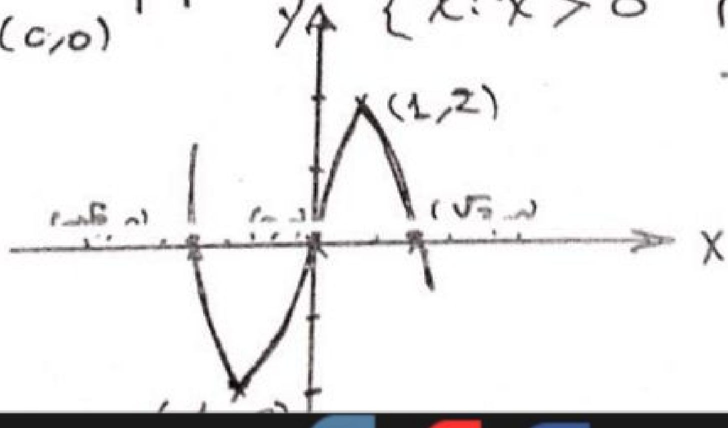
(3) $f''(x)=-6x \rightarrow -6x=0 \rightarrow x=0$



مناطق التقعر $\{x: x<0\}$

مناطق التحدب $\{x: x>0\}$

(0,0) نقطة انقلاب



x	y	
0	0	نقطة تقاطع انقلاب
$\sqrt{3}$	0	تقاطع
$-\sqrt{3}$	0	تقاطع
1	2	نهاية عظمى
-1	-2	نهاية صغرى

60/3

(3) $f(x)=(x-1)^3$

الحل

(1) $x=0 \to f(0)=(0-1)^3=(-1)^3=-1 \to (0,-1)$ مع الصادات

$y=0 \to (x-1)^3=0 \to x-1=0 \to x=1$

مع السينات $(1,0)$

(2) $f'(x)=3(x-1)^2$

$3(x-1)^2=0 \xrightarrow{\div 3} (x-1)^2=0 \to x=1$

$x<1$ $\quad$ $x>1$

$f'(x)$: $+ + + + \;\; 1 \;\; + + + +$

مناطق التزايد (1) $\{x : x\in R, x>1\}$

(2) $\{x \mid x\in R, x<1\}$

مناطق التناقص لا توجد

(3) $f''(x)=6(x-1) \to 6(x-1)=0 \to x=1$

123

$x<1$ $\quad$ $x>1$

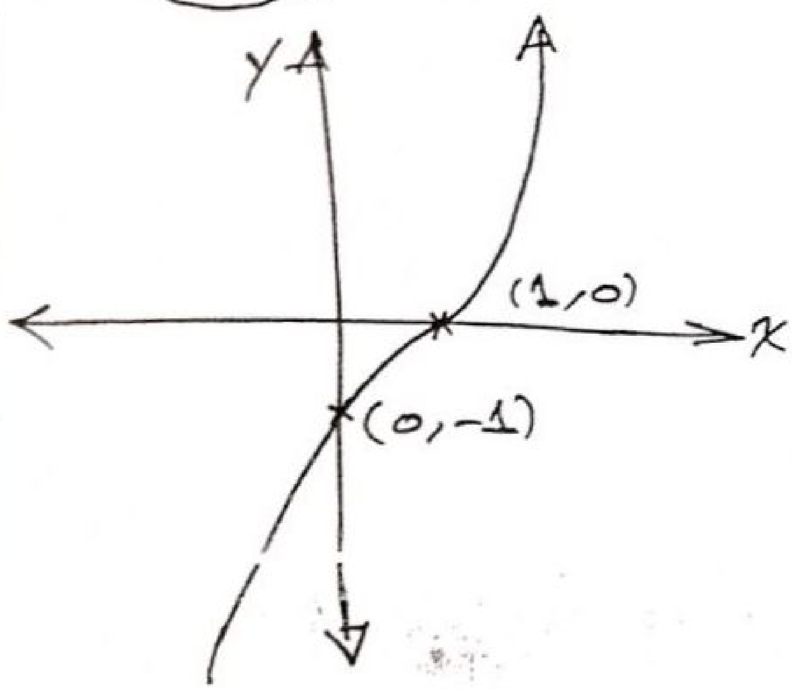
$f''(x)$ الإشارة $- - - - \;\; 1 \;\; + + + +$

$\cap$ $\quad$ $\cup$

مناطق التقعر $\{x : x\in R, x>1\}$

مناطق التحدب $\{x : x\in R, x<1\}$

نقطة انقلاب $(1,0) \leftarrow f(1)=0 \leftarrow x=1$



x	y	
0	-1	نقطة تقاطع
1	0	نقطة انقلاب

70/3

(4) $f(x)=x^3-2x^2+1$

الحل (1) $x=0 \rightarrow f(0)=(0)^3-2(0)^2+1=1 \rightarrow (0,1)$ = مع الصادات

$y=0 \rightarrow x^3-2x^2+1=0 \rightarrow x=1$

هذا واحد من الجذور الباقية وهي الحل

(2) $f'(x)=3x^2-4x$

$3x^2-4x=0 \rightarrow x(3x-4)=0 \rightarrow x=0$

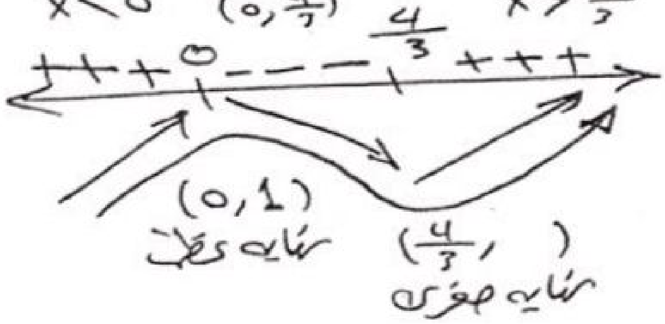
$3x=4 \rightarrow x=\frac{4}{3}$

مناطق التزايد

(1) $\{x : x\in R, x>\frac{4}{3}\}$

(2) $\{x : x\in R, x<0\}$

مناطق التناقص $(0,\frac{4}{3})$



124

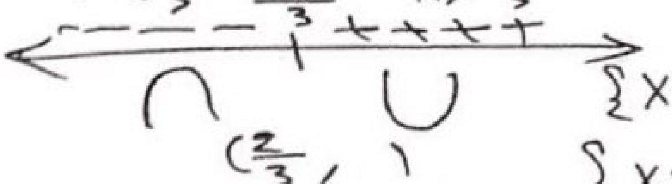
$(0,1)$ نهاية عظمى $\leftarrow y=1 \leftarrow x=0$ عندما

$f(\frac{4}{3})=(\frac{4}{3})^3-2(\frac{4}{3})^2+1=\frac{64}{27}-2(\frac{16}{9})+1 \leftarrow x=\frac{4}{3}$ عندما

$=\frac{-5}{27} \rightarrow (\frac{4}{3},\frac{-5}{27})$ نهاية صغرى

(3) $f''(x)=6x-4 \rightarrow 6x-4=0 \rightarrow 6x=4 \rightarrow x=\frac{4}{6}$

$x=\frac{2}{3}$



مناطق التقعر $\{x : x>\frac{2}{3}\}$

مناطق التحدب $\{x : x<\frac{2}{3}\}$

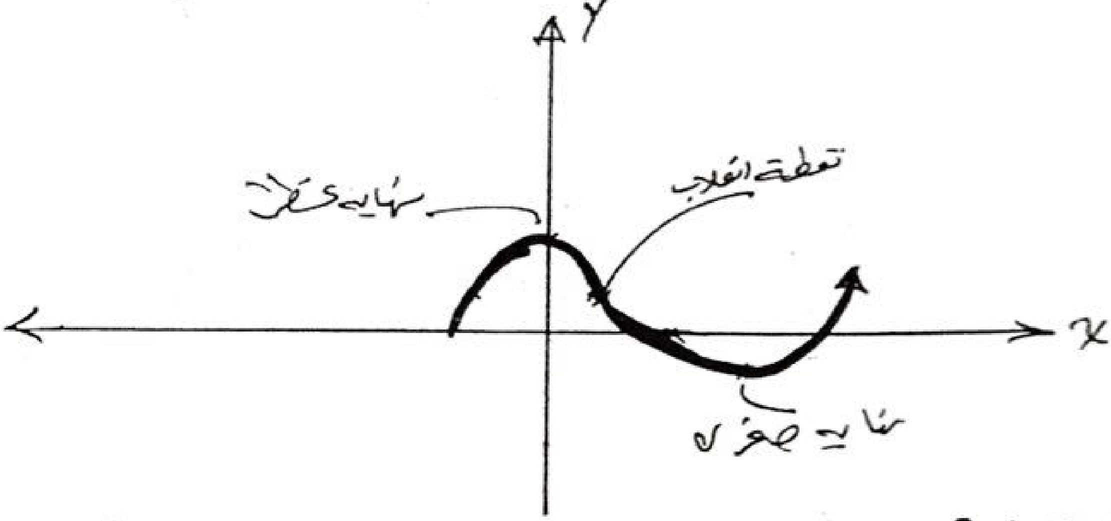
$f(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^3-2(\frac{2}{3})^2+1 \leftarrow x=\frac{2}{3}$

$=\frac{8}{27}-2(\frac{4}{9})+1=\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+1=\frac{11}{27}$

$\therefore (\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ نقطة انقلاب

(71) 3

x	y		
0	1	$(0,1)$	تقاطع مع ص
1	0	$(1,0)$	تقاطع س
$\frac{4}{3}$	$\frac{-5}{27}$	$(\frac{4}{3},\frac{-5}{27})$	نهاية صغرى
$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{27}$	$(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	نقطة انقلاب



125)

اثرائيات

ارسم منحنى الدوال الآتية

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$

(2) $f(x)=3-2x-x^2$

(3) $f(x)=x^3-3x^2+2$

(4) $f(x)=x^5$

(5) $f(x)=3x^2-x^3$

(6) $f(x)=x^2-2x+4$

تم حل جميع أسئلة الواجب البيتي

تطبيقات على النهايات العظمى والصغرى

خطوات الحل

(1) فرضية ورسم [فرضية الى رموز المطلوب. والرسم في حالة وجود اشكال الهندسية]

(2) دالة أو قانون [من السؤال حيث تأتي بعد كلمة (او قبل كلمة اكبر من أو اصغر من]

(3) علاقة [تعطى في السؤال أو تستخرج من الرسم] في حالة وجود اكثر من متغير

(4) نعوض العلاقة بالدالة [للحصول على دالة فيها متغير واحد فقط

(5) نشتق الدالة * ثم نبسط * ثم المشتقة = صفر * نحصل على متغير واحد

(6) نعوض المتغير في العلاقة للحصول على المتغير الآخر .

(7) للتحقق من صحة الحل [اذا جاء في السؤال اكبر من فيكون

$+++\ x\ ---$

نهاية عظمى (x, y)

غير مطلوب في الحل

[اذا جاء في السؤال اصغر من فيكون

$---\ x\ +++$

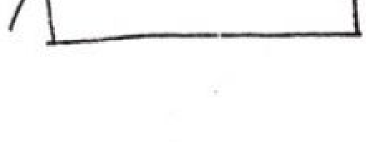
نهاية صغرى (x, y)

126

مثال 1

جد ابعاد اكبر مستطيل محيطه (120) متر ؟

الحل



ابعاد اكبر مستطيل [يعني اكبر مساحة مستطيل]

نفرض طول المستطيل $= x$

عرض المستطيل $= y$

مساحة المستطيل $= m$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$\boxed{m = x \cdot y}$ —— دالة *

محيط المستطيل = 2(الطول + العرض)

$120 = 2(x+y) \div 2$

$60 = x+y \longrightarrow \boxed{y = 60 - x}$ —— علاقة x

نعوض العلاقة في الدالة ⟵

$m = x(60-x)$

$m = 60x - x^2 \xrightarrow{\text{نشتق}} m' = 60-2x \longrightarrow m' = 0$

$60-2x = 0 \longrightarrow 2x = 60 \to x = 30$

$y = 60-30 = 30$ نعوض $x=30$ في العلاقة

التحقق

إشارة m' : + + + + 30 - - - -

نهاية عظمى

127

مثال 2 جد عددين مجموعهما يساوي 20 اذا كان

(a) حاصل ضربهما اكبر ما يمكن

(b) مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن

الحل (a) نفرض العدد الاول $= x$

$y =$ العدد الثاني

$m =$ حاصل ضربهما

$\boxed{m = xy}$ دالة

$x+y = 20 \longrightarrow \boxed{y = 20 - x}$ علاقة

نعوضها العلاقة في الدالة

$m = x(20-x)$

$m = 20x - x^2$

$$m' = 20-2x \to m'=0 \to 20-2x=0 \to 20=2x$$

$$x=\frac{20}{2} \to x=10 \xrightarrow[\text{العلاقة}]{\text{بالتعويض}} y=20-10 \to y=10$$

التحقق (غير مطلوب في الحل)

$+ + + \quad 100 \quad - - - -$

نهاية عظمى

(b) مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن

نفرض المجموع $= h$

$\boxed{h = x^2 + y^2}$ ← دالة

$\boxed{y = 20 - x}$ ← العلاقة

$$\therefore\ h = x^2 + (20-x)^2$$

$$h' = 2x + 2(20-x)\times -1 = 2x - 2(20-x)$$

$$2x - 40 + 2x = 0 \to 4x - 40 = 0 \to 4x = 40$$

$x = 10$ العدد الاول

$y = 20 - 10 = 10$ العدد الثاني

التحقق فقط

$- - - - \quad 10 \quad + + + +$

نهاية صغرى

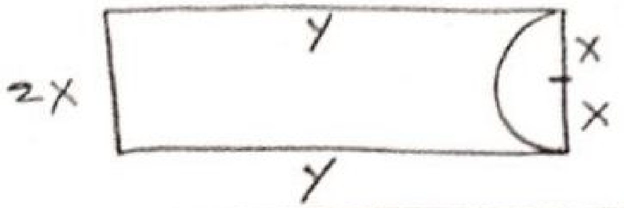
طريق الكلية

القراءة المتواصلة ← الامتحان اليومي ←

الصبر ← الذكاء ← الكلية

مثال 3 من مستطيل محيطه (120)cm قطعت منطقة 75/3
على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين
للمستطيل . ما ابعاد ذلك المستطيل لكي تكون المساحة المتبقية
بعد القطع اكبر ما يمكن ؟

الحل



نفرض طول المستطيل = y

عرض المستطيل = $2x$

مساحة المستطيل = الطول × العرض = $2xy$

المساحة المقطوعة (مساحة نصف دائرة) = $\frac{1}{2}x^2\pi$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

x نصف القطر
مساحة الدائرة = $x^2\pi$

المساحة المتبقية = مساحة المستطيل - مساحة نصف دائرة

$$m = 2xy - \frac{1}{2}x^2\pi = 2xy - \frac{1}{\cancel{2}}x^2 \cdot \frac{\cancel{22}^{11}}{7}$$

$$\boxed{m = 2xy - \frac{11}{7}x^2}$$ ---- دالة

محيط المستطيل = 2(الطول + العرض)

$$\therefore 120 = 2(2x+y) \div 2 \rightarrow 60 = 2x+y$$

$$\therefore \boxed{y = 60-2x}$$ ---- علاقة

نعوض العلاقة في الدالة

$$m = 2x(60-2x) - \frac{11}{7}x^2$$

$$m = 120x - 4x^2 - \frac{11}{7}x^2$$

$$m' = 120 - 8x - \frac{22}{7}x \rightarrow 120 - 8x - \frac{22}{7}x = 0 \quad (\text{نضرب} \times 7)$$

$$840 - 56x - 22x = 0 \rightarrow 840 - 78x = 0 \rightarrow 840 = 78x$$

$$\therefore x = \frac{840}{78} = \frac{140}{13}\ cm$$

$$\therefore 2x = 2\cdot\frac{140}{13} = \frac{280}{13} \rightarrow 60 - 2x = y \rightarrow 60 - \frac{280}{13}$$

$$y = \frac{500}{13}$$

129

76/3

مثال 4 جد العدد الذي زيادة ثلاثة امثال مربعه على مكعبه اقل ما يمكن ؟

الحل نفرض العدد $= x$ ← ثلاثة امثال مربعه $= 3x^2$

مكعب العدد $= x^3$

زيادته تعني −

$m = 3x^2 - x^3$

$m' = 6x - 3x^2 \to 6x - 3x^2 = 0 \quad \div 3 \to 2x - x^2 = 0$

عامل مشترك $x(2-x) = 0 \to x = 0$ يهمل اما

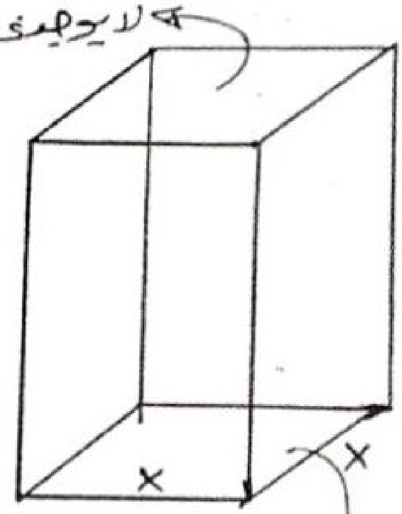
او $2 - x = 0 \to x = 2$ العدد

مثال 5 يراد صنع حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه (864) اوجد اقل مساحة من الالواح يمكن ان تستخدم في صنعه .

الحل

نفرض طول ضلع الحوض $= x$

ارتفاع الحوض $= y$



م الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة (لانه بدون غطاء)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

محيط القاعدة = محيط المربع = 4 × طول الضلع
$= 4x$

نفرض م الكلية $= h$

$\boxed{h = 4xy + x^2}$ دالة

مساحة قاعدة = مساحة مربع $= x^2$

v = حجم متوازي السطوح = مساحة القاعدة × الارتفاع

= مساحة مربع × الارتفاع

$V = x^2 y \to 864 = x^2 y \to \boxed{y = \frac{864}{x^2}}$ علاقة

نعوض العلاقة في الدالة

130

77/3

$$\therefore h = 4x\frac{864}{x^2} + x^2 = 4x^{-1}(864) + x^2 = 3456x^{-1} + x^2$$

$$h' = -3456x^{-2} + 2x = \frac{-3456}{x^2} + 2x = 0 \quad \div 2 \rightarrow$$

$\frac{-1728}{x^2} + x = 0$ بالضرب في x^2 $\rightarrow -1728 + x^3 = 0$

$$\therefore x^3 = 1728 \rightarrow x = 12 \text{ m}$$

$$\therefore y = \frac{864}{x^2} = \frac{864}{(12)^2} = \frac{864}{144} = 6 \text{ m}$$

$$h = 4xy + x^2 = 4(12)\cdot 6 + (12)^2 = 432 \text{ m}^2$$

مثال 6

اذا كانت دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة معينة هي

131) $C(x) = \frac{1}{9}x^2 + 6x + 100$

جد حجم الانتاج الذي عنده يكون معدل الكلفة اقل ما يمكن ؟

الحل

معدل الكلفة = $AC = \frac{C(x)}{x}$

$$AC = \frac{\frac{1}{9}x^2 + 6x + 100}{x} = \frac{1}{9}x + 6 + 100x^{-1}$$

$$(AC)' = \frac{1}{9} - 100x^{-2} \rightarrow (AC)' = \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2} = 0$$

وسطين = طرفين $\rightarrow x^2 = 900 \rightarrow x = 30$ حجم الانتاج

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

واجب بيتي

(1) جد العدد الذي (أ) عند اضافته الى مربعه يكون الناتج اقل ما يمكن
(ب) عند اضافته الى مقلوبه يكون الناتج اصغر ما يمكن (العدد موجب)

(2) جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته 1 سم²

(3) خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم 108 م². جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن. علماً ان الخزان ذو غطاء كامل

تمارين (3-7)

(1) جد عددين مجموعهما 20 وحاصل ضربهما اكبر ما يمكن

الحل

نفرض العدد الاول $= x$

العدد الثاني $= y$

$x+y=20 \rightarrow \boxed{y=20-x}$ ---- علاقة

$\boxed{m=xy}$ ---- دالة ـــ من كلمة اكبر ما يمكن

نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$m=x(20-x)=20x-x^2$

$m'=20-2x \rightarrow 20-2x=0 \rightarrow 20=2x$

(132)

$\boxed{x=10} \rightarrow y=20-10=10$

$x<10 \quad 10 \quad x>10$

اشارة $f'(x)$ ← + + + | - - - - →

نهاية عظمى = اكبر ما يمكن

للتحقق من المطلوب في الحل

(2) جد العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن ؟

الحل نفرض العدد $= x$ ←— مربعه x^2

$m=x-x^2$ ـــ زيادته تعني -

$m'=1-2x \rightarrow 1-2x=0$

$1=2x$

$x=\frac{1}{2}$ العدد المطلوب

$x<\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad x>\frac{1}{2}$

للتحقق ← + + + + | - - - - - →

نهاية عظمى

79/3

(3) جد عددين موجبين مجموعهما (15) وحاصل ضرب مربع احدهما في مكعب الآخر اكبر ما يمكن ؟

الحل : نفرض العدد الاول $= x$

العدد الثاني $= y$

مجموعهما $= 15$

$x+y=15 \rightarrow \boxed{y=15-x}$ ——* علاقة

$\boxed{m=y^2x^3}$ ---- دالة

نعوض العلاقة في الدالة

$m=(15-x)^2 \cdot x^3$

حاصل ضرب دالتين

$m'=(15-x)^2 \cdot 3x^2+x^3 \cdot 2(15-x) \cdot -1$

133)

$m'=3x^2(15-x)^2-2x^3(15-x)$

$m'=x^2(15-x)\left[3(15-x)-2x\right]$

$x^2(15-x)(45-3x-2x)=0$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

$x^2(15-x)(45-5x)=0$

$\therefore$ أما $x^2=0 \rightarrow x=0$ يهمل

او $15-x=0 \rightarrow x=15$ يهمل

لان y تصبح صفر وهذا غير معقول

او $45-5x=0 \rightarrow 45=5x \rightarrow \boxed{x=9}$ العدد الاول

$\therefore y=15-9=6$ العدد الثاني

(4) جد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضرب مربع احدهما في مربع الآخر اكبر ما يمكن ؟

الحل نفرض العدد الاول $= x$ ، العدد الثاني $= y$

$x+y=10 \rightarrow \boxed{y=10-x}$ ---- علاقة

$\boxed{m=x^2y^2}$ ---- دالة

80/3

نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$m = x^2(10-x)^2$

$m' = x^2 \cdot 2(10-x)\cdot -1 + (10-x)^2 \cdot 2x$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$m' = -2x^2(10-x) + 2x(10-x)^2$

عامل مشترك

$2x(10-x)[-x+(10-x)] = 0$

$2x(10-x)(-x+10-x) = 0$

$2x(10-x)(-2x+10) = 0$

الأستاذ سعد العبّودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

أما $2x = 0 \to x = 0$ تهمل

أو $10-x = 0 \to x = 10$ تهمل لأن لا تصح صفراً ولهذا الاعلى

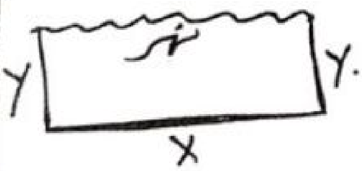
أو $-2x+10 = 0 \to 2x = 10 \to x = 5$ العدد الأول

$\therefore y = 10-5 \to y = 5$ العدد الثاني

(134)

(5) قطعة ارض مستطيلة الشكل يحدها نهر من احدى جهاتها جد اكبر مساحة من الارض يمكن تسييجها بسياج طوله 100 m

الحل نفرض طول المستطيل = x ، عرض المستطيل = y



$\boxed{m = x\cdot y}$ دالة — المساحة = الطول × العرض

طول السياج = محيط المستطيل

$x+2y = x+y+y$ = محيط المستطيل

$\therefore 100 = x+2y \to \boxed{x = 100-2y}$ علاقة

$m = y(100-2y)$ نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$m = 100y - 2y^2 \to m' = 100-4y \to 100-4y = 0$

$\therefore 100 = 4y \to y = \frac{100}{4} \to y = 25$

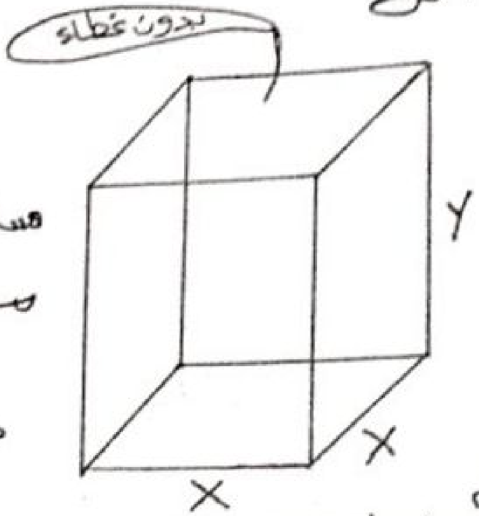
$\therefore x = 100-2(25) = 100-50 \to x = 50$

$\therefore m = x\cdot y = 50\cdot 25 = 1250$ م²

(81) / 3

(6) صوص على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة وحجمه $(108)m^3$. جد ابعاده بحيث تكون مساحة الالواح المستخدمة في صنعه اقل ما يمكن ؟

الحل



نفرض طول القاعدة $= X$

لان القاعدة مربعة

$\therefore$ عرض القاعدة $= X$

نفرض ارتفاع المتوازي $= Y$

مساحة متوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

س = محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة المربع

اعلم

(1) مساحة القاعدة = مساحة مربع
$= X^2$

(2) محيط القاعدة = محيط المربع
$= 4 \times$ طول الضلع
$= 4X$

$\therefore \boxed{m = 4X \cdot Y + X^2}$ دالة ....

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$h = X \cdot X \cdot Y = X^2 Y$

135)

$108 = X^2 Y \rightarrow \boxed{Y = \frac{108}{X^2}}$ علاقة ....

نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$$m = 4X \cdot \frac{108}{X^2} + X^2$$

$$m = \frac{432}{X} + X^2 \rightarrow m = 432X^{-1} + X^2$$

$$m' = -432X^{-2} + 2X \rightarrow \frac{-432}{X^2} + 2X = 0 \quad (X^2 \text{ نضرب في}$$

$$-432 + 2X^3 = 0 \Rightarrow 2X^3 = 432$$

$$X^3 = \frac{432}{2} = 216 \rightarrow X = 6\ m$$ طول القاعدة

$$\therefore Y = \frac{108}{36} = 3\ m$$ الارتفاع

الأستاذ سعد الجبوري
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

82/3

(7) أطلقت رصاصة إلى الأعلى وكان ارتفاعها (m) متر في نهاية t من الثواني . بحيث $m=224t-16t^2$. احسب أقصى ارتفاع تصل إليه الرصاصة

$v(t)=m'=224-32t$

$224-32t=0$

$224=32t \rightarrow t=\frac{224}{32}=7$

∴ نعوض $t=7$ في m ينتج

$m(7)=224(7)-16(7)^2$

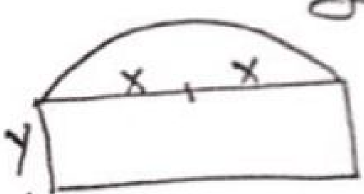
$=1568-748=784\ m$ أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع تصله الرصاصة عندما تصبح سرعتها صفراً ومنها نستخرج x ونعوض في m

(8) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة . بحيث ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط المستطيل m(8) جد أبعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن ؟

الحل 136

نفرض طول المستطيل = $2x$ ، عرضه = y



مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

$m=2xy+\frac{1}{2}x^2\pi$

$\boxed{m=2xy+\frac{11}{7}x^2}$ ← دالة

محيط المستطيل = 2 (الطول + العرض)

$8=2(2x+y) \quad \div 2$

$4=2x+y \rightarrow \boxed{y=4-2x}$ علاقة

نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$m=2x(4-2x)-\frac{11}{7}x^2$

$m=8x-4x^2-\frac{11}{7}x^2$

شرح

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$m=2xy$

مساحة الدائرة = نق² π

$m=x^2\pi$

∴ مساحة ½ دائرة =

$=\frac{1}{2}x^2\pi$

$=\frac{1}{\cancel{2}}x^2\cdot\frac{\cancel{22}}{7}$

$=\frac{11}{7}x^2$

(83) $\frac{}{3}$

$m' = 8 - 8x - \frac{22}{7}x \rightarrow 8 - 8x - \frac{22}{7}x = 0$ (7 نضرب في

$56 - 56x - 22x = 0 \rightarrow 56 - 34x = 0 \rightarrow 56 = 34x$

$\therefore x = \frac{56}{34} = \frac{28}{17}$ m

$\therefore$ طول المستطيل $= 2x = 2 \cdot \frac{28}{17} = \frac{56}{17}$ m

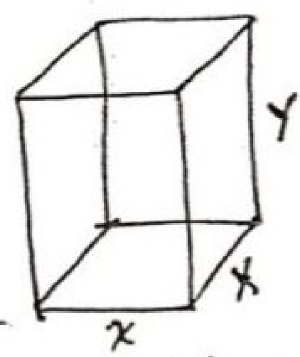
$\therefore$ عرض المستطيل $= y = 4 - \frac{56}{17} = \frac{68-56}{17} = \frac{12}{17}$ m

---

(9) في ورشة للنجارة يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل وله غطاء كامل. جد ابعاد الصندوق لكي تكون مساحة الخشب المستعمل اقل ما يمكن. علماً ان سعة الصندوق $(27)\,m^3$

الحل

نفرض ابعاد القاعدة $= x$ ، الارتفاع $= y$



مساحة متوازي السطوح = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= محيط القاعدة × الارتفاع + 2 مساحة قاعدة واحدة

= محيط مربع × الارتفاع + 2 مساحة مربع

$\boxed{m = 4x \cdot y + 2x^2}$ — دالة

مساحة القاعدة = مساحة مربع
$= x^2$

محيط القاعدة = محيط مربع
$= 4x$

سعة الصندوق = حجم الصندوق
= الطول × العرض × الارتفاع
$= x^2 y$ =

$h = x^2 y \rightarrow 27 = x^2 y$

$\boxed{y = \frac{27}{x^2}}$ — * علاقة

نعوض العلاقة في الدالة ينتج

$m = 4x \cdot \frac{27}{x^2} + 2x^2$

$= \frac{108}{x} + 2x^2 = 108x^{-1} + 2x^2$

$m' = -108x^{-2} + 4x = \frac{-108}{x^2} + 4x$

84/3

$m' = 0 \rightarrow \frac{-108}{x^2} + 4x = 0 \xrightarrow{\text{نضرب في } x^2} -108 + 4x^3 = 0$

$4x^3 = 108 \rightarrow x^3 = \frac{108}{4} = 27 \rightarrow x = 3\ m$ القاعدة

$\therefore y = \frac{27}{(3)^2} = \frac{27}{9} = 3\ m$ الارتفاع

(10) اذا كانت دالة الكلفة لانتاج سلعة ما هي $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 40$ جد حجم الانتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة اقل ما يمكن ؟

الحل

نجد معدل الكلفة $AC = \frac{c(x)}{x}$

$AC = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x + 40}{x} = \frac{1}{2}x + 1 + 40x^{-1}$

$\frac{d(AC)}{dx} = (AC)' = \frac{1}{2} - 40x^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2} = 0$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{40}{x^2} \xrightarrow{\text{وسطين = طرفين}} x^2 = 80 \rightarrow x = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5}$

$\therefore x = 4\sqrt{5}$

$\therefore$ عندما $x = 4\sqrt{5}$ فان القيمة الصغرى لمعدل الكلفة نحصل عليه عندما يكون حجم الانتاج $4\sqrt{5}$ وحدة

$4\sqrt{5}$
$- - - - -\ |\ + + +$

نهاية صغرى

تم بحمد الله وشكره

138

الرياضيات

السادس الادبي

الفصل الرابع

التكاملات

139

الأسئلة الوزارية

اعداد الاستاذ

سعد العبودي

تطلب حصراً من

مكتبة الفتح الجديد

$\frac{1}{4}$

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الرابع (4)

التكامل (Integration)

هو عملية عكس التفاضل (الاشتقاق) ويرمز له بالرمز $\int$

القانون العام للتكامل

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C} \quad , n \neq -1$$

ثابت حقيقي c

اي نضيف الى الاس واحد وتقسم على الاس الجديد

لاحظ الامثلة

140

(1) $\int x^2 dx$

تعني ان التكامل بالنسبة الى x ... dx

الحل

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$$

c ثابت التكامل يضاف بعد كل عملية تكامل غير محدد

$$= \frac{x^3}{3} + C$$

الاشارات مختلفة نطرح ونأخذ اشارة العدد الاكبر

(2) $\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(3) $\int x^{-9} dx = \frac{x^{-8}}{-8} + C = \frac{-1}{8x^8} + C$

(4) $\int x^{99} dx = \frac{x^{100}}{100} + C$

الاستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠١٥١٠٢١٨٦

(5) $\int x^{\frac{3}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+c = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

* لايجاد $\frac{3}{2}+1$ بصوره سريعة

بسط

$\frac{3}{2}+1 = \dfrac{\text{البسط}+\text{المقام}}{\text{المقام}} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$

مقام

(6) $\int x^{\frac{2}{3}}dx = \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+c$

(7) $\int x^{\frac{-1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c = 2x^{\frac{1}{2}}$

(8) $\int \frac{1}{x^2}dx$

x في المقام يجب ان نرفعها الى البسط مع تغير الاشارة لاحظ

$\int x^{-2}dx = \dfrac{x^{-1}}{-1}+c = \dfrac{-1}{x}+c$

$\boxed{\text{ملاحظة}}$ جميع الملاحظات في قواعد المشتقة تنطبق على التكاملات مثل (التخلص من الكسر او التخلص من الجذر ...)

(9) $\int \frac{1}{x^{-9}}dx = \int x^9 dx = \dfrac{x^{10}}{10}+c$

داخل على الخارج

(10) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

نتخلص من الجذر ثم الكسر

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$= \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int x^{\frac{-3}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}}+c = -2x^{\frac{-1}{2}}+c$

(12) $\int dx = x + c$

ملاحظة اذا جاء في السؤال

$\int dx = x + c$

$\int dy = y + c$

$\int dz = z + c$

قواعد التكامل غير المحدد

(1) $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

حيث c عدد ثابت

اي تكامل عدد ثابت = العدد الثابت × التكامل

(142) اي ان العدد الثابت يبقى في الناتج النهائي ولا يؤثر على التكامل

الامثلة

(1) $\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + c = x^3 + c$

(2) $\int \frac{-1}{2} x^5\, dx = \frac{\frac{-1}{2} x^6}{6} + c = \frac{1}{6} \cdot \frac{-1}{2} x^5 = \frac{-1}{12} x^5$

(3) $\int \sqrt{2}\, x^{-9}\, dx = \frac{\sqrt{2}\, x^{-8}}{-8} + c = \frac{-1}{8} \cdot \sqrt{2}\, x^{-8} + c = \frac{-\sqrt{2}}{8x^8}$

(4) $\int (x+1)\, dy = (x+1)y + c$

لاحظ ان التكامل بالنسبة لـ y لذلك (x+1) ثابت

(5) $\int (y+2)\, dx = (y+2)x + c$

التكامل بالنسبة الى x لذلك (y+2) ثابت

(6) $\int 3\, dx = 3x + c$

(7) $\int \frac{-2}{5}\, dz = \frac{-2}{5} z + c$

4/4

$$(2)\ \int [f(x) \mp g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx$$

اي ان التكامل يتوزع على الجمع والطرح

واعلم

ان التكامل لايتوزع على الضرب والقسمة

امثلة

$$(1)\ \int (x^2+1)\,dx = \int x^2\,dx + \int dx$$

يمكن الاستغناء عن هذه الخطوة

$$= \frac{x^3}{3} + x + c$$

$$(2)\ \int (x^3-3x^2+5)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + 5x + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + c$$

143

$$(3)\ \int (x^2+1)(2x-3)\,dx$$

لاتنسى (ان التكامل لايتوزع على الضرب) لذلك نفتح الاقواس باستخدام خاصية التوزيع

$$= \int (2x^3-3x^2+2x-3)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{4}_2} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 3x + c = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + c$$

$$(4)\ \int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right) dx$$

نتخلص من الجذر ثم من الكسر ثم نكامل

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{-2}{3}} - 1\right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} - x + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{1}{3}} - x + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 9\sqrt[3]{x} + c$$

(6) $\int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx$ التكامل لايتوزع على القسمة لذلك نحلل البسط حتى يتم الاختصار مع المقام

لا تنسى

$= \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}\,dx$

عامل مشترك

فرق بين مكعبين

$\int \frac{x\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}}\,dx = \int x(x^2+2x+4)\,dx$

$= \int (x^3+2x^2+4x)\,dx = \frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+c$

$= \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2+c$

144 (7) $\int \sqrt{z^2+3z+2}\,dx$ التكامل بالنسبة الى x لذلك $\sqrt{\ }$ يعتبر ثابت

$= \sqrt{z^2+3z+2}\,x+c$

قاعدة

(3) $\int [y]^n \cdot y'\,dx = \frac{[y]^{n+1}}{n+1}+c$

مشتقة داخل القوس

حيث $y=f(x)$

اي تكامل القوس

يجب توفر مشتقة داخل القوس في التكامل ⟸ نضيف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد

امثلة

(1) $\int (x^2+1)^3 \cdot 2x = \frac{(x^2+1)^4}{4}+c$

مشتقة داخل القوس

لاحظ ان مشتقة داخل القوس تهمل عند التكامل

6/4

الاستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(2) $\int (x^2+1)^3 \cdot x\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3 \cdot 2x\,dx$

$= \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^4}{4} + c$

$= \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$

ملاحظة
في حالة عدم وجود مشتقة داخل القوس كما في هذا المثال. حيث مشتقة (x^2+1) هي $2x$ نلاحظ ان x موجودة ولكن 2 غير موجودة لذلك نضرب في 2 ونقسم على 2

(3) $\int (x^3+7)^5 \cdot x^2\,dx$

ضربنا في 3 وقسمنا على 3 لان مشتقة داخل القوس $= 3x^2$

$= \frac{1}{3}\int (x^3+7)^5 \cdot 3x^2\,dx$

نلاحظ ان مشتقة داخل القوس تحل في حالة توفرها

$= \frac{\frac{1}{3}(x^3+7)^6}{6} + c$

$= \frac{1}{18}(x^3+7)^6 + c$

تخلصنا من الكسر

(4) $\int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \int (x^2-4x+5)^{-2}(x-2)$

مشتقة القوس هي $2x-4 = 2(x-2)$

$= \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2} \cdot 2(x-2)\,dx$

$= \frac{\frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{2(x^2-4x+5)} + c$

نتخلص من الجذر [داخل على الخارج]

(5) $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\,dx$

عامل مشترك

$= \int (3x^3-5x^5)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int [x^3(3-5x^2)]^{\frac{1}{3}}\,dx$

الاس يتوزع على الضرب

$= \int [x^3]^{\frac{1}{3}}(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x\,dx$

$= \frac{-1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot -10x\,dx = \frac{-1}{10}\,\frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{40}\sqrt[3]{(3-5x^2)^4} + c$

7/4

تتخلص من الجذر ثم من الكسر

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}$

$= \int \frac{dx}{(x^2-14x+49)^{\frac{1}{5}}} = \int (x^2-14x+49)^{\frac{-1}{5}} dx$

مربع كامل

عند الرفع تضرب الاسس

$= \int [(x-7)^2]^{\frac{-1}{5}} dx = \int (x-7)^{\frac{-2}{5}} dx$

خارج ← داخل

$= \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}(x-7)^{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[5]{(x-7)^3} + c$

فرق بين مربعين

(7) $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2} dx$

146

$= \int \frac{[(3x^2-4)-4][(3x^2-4)+4]}{x^2} dx$

$= \int \frac{(3x^2-8)(3x^2)}{x^2} dx = \int \frac{(3x^2-8)(3\cancel{x^2})}{\cancel{x^2}} dx$

$= \int (3x^2-8)(3) dx = \int (9x^2-24) dx = \frac{9x^3}{3} - 24x + c$

$= 3x^3 - 24x + c$

(8) $\int \sqrt{x^4+x^2}\, dx$

عامل مشترك

$= \int \sqrt{x^2(x^2+1)}\, dx$

الجذر يتوزع على الضرب

$= \int \sqrt{x^2}\sqrt{x^2+1}\, dx$

$\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + c = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c$

تمارين (1-4)

جد تكاملات كلا مما ياتي بالنسبة الى x :

(1) $\int (6x^2-4x+3)\,dx$

$= \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c = 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

(2) $\int (3x-1)(x+5)\,dx$

$= \int (3x^2+15x-x-5)\,dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{15x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - 5x + c$

$= x^3 + \frac{14x^2}{2} - 5x + c = x^3 + 7x^2 - 5x + c$

(3) $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2\,dx$

$= \int \sqrt{x}\,(x+2\sqrt{x}+1)\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}}\,x + 2x + \sqrt{x})\,dx$

$= \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{1}{2}})\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

(4) $\int \frac{x^3+27}{x+3}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{(x+3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x+3)}}\,dx = \int (x^2+3x+9)\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + c$

(5) $\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}dx = \int \frac{x^3}{5x^5} - \frac{2x^2}{5x^5} + \frac{1}{5x^5}dx$

$= \frac{1}{5}\int(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5})dx = \frac{1}{5}\int(x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-5})dx$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-4}}{-4}\right] + c = \frac{1}{5}\left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4x^4}\right] + c$

(6) $\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}dx$

$= \int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}}(x^2+2)dx = \frac{1}{3}\int(x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}} \cdot 3(x^2+2)dx$

$= \frac{\frac{1}{\cancel{3}}(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} + c = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2} + c$

148 (7) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

$= \int x^{\frac{-1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+2)dx = \int(x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{-1}{3}})dx$

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{2x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x^{\frac{2}{3}} + c$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}}$

$= \int \frac{dx}{(x^2+16x+64)^{\frac{2}{5}}} = \int(x^2+16x+64)^{\frac{-1}{5}}dx$

$= \int[(x+8)^2]^{\frac{-1}{5}}dx = \int(x+8)^{\frac{-2}{5}}dx = \frac{(x+8)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$

$= \frac{5}{3}(x+8)^{\frac{3}{5}} + c$

الاستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة

10/4

(9) $\int \sqrt[7]{2x^9-3x^7}\,dx$

$= \int \sqrt[7]{x^7(2x^2-3)}\,dx = \int x(2x^2-3)^{\frac{1}{7}}dx$

$= \frac{1}{4}\int (2x^2-3)^{\frac{1}{7}}4x\,dx = \frac{\frac{1}{4}(2x^2-3)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}} + c$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}(2x^2-3)^{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{32}\sqrt[7]{(2x^2-3)^8} + c$

(10) $\int (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

$= \int (3x^2 + x^{\frac{-1}{2}})\,dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x^3 + 2\sqrt{x} + c$

(11) $\int \frac{y\,dx}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}$ التكامل بالنسبة لـ x

$= \frac{y}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}x + c$ تعتبر ثابتة

(12) $\int \frac{x^4-16}{x+2}\,dx$

$= \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x+2}\,dx = \int \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}(x^2+4)}{\cancel{x+2}}\,dx$

$= \int (x^3+4x-2x^2-8)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - 8x + c$

$= \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 - 8x + c$

(13) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})\,dx = \int (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-1}{3}})\,dx$

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

11/4

(14) $\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\,dx$

$= \int (1-3x)^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{-1}{3}\int (1-3x)^{\frac{2}{5}}\cdot -3\,dx$

$= \frac{\frac{-1}{3}(1-3x)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{-1}{5}\sqrt[3]{(1-3x)^5} + c$

(15) $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2 = \frac{1}{3}\frac{(x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+4)^3} + c$

150 (16) $\int (z^2\sqrt{z^3}+4)\,dx$

$= (z^2\sqrt{z^3}+4)x + c$

(اثرائيات)

جد تكامل كل من

① $\int \frac{3x+12}{(x+4)^7}\,dx$

② $\int \frac{3}{4x^2}\,dx$

③ $\int \frac{(2+3x)\,dx}{\sqrt{2-4x-3x^2}}$

④ $\int \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

⑤ $\int \frac{x^4-81}{x-3}\,dx$

⑥ $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{5-x^3}}$

⑦ $\int 6\sqrt{x+1}\,dx$

⑧ $\int \sqrt[3]{4x^3-3x+1}\,(4x^2-1)\,dx$

⑨ $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$

اسأل .. اسأل .. اسأل

لاتترك اي سؤال بدون حل

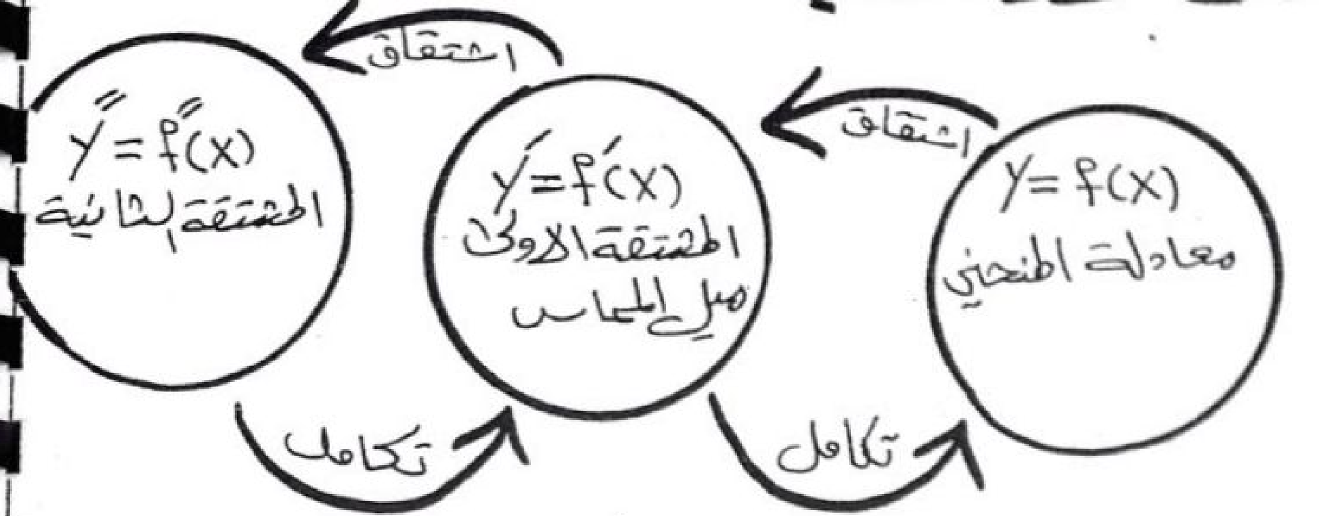
12/4

الأستاذ محمد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

التطبيقات الهندسية

لاحظ المخطط التالي



كما مر سابقاً ان التكامل عكس المشتقة (من المخطط) 151

∴ اذا اعطية في السؤال الميل والمطلوب معادلة المنحني ⟵ $\boxed{\int \text{الميل} = \text{معادلة المنحني}}$

مع العلم ان كل $f(x) = y$ وان الميل هو المشتقة الاولى

أو $\boxed{y = f(x) = \int f'(x)}$

* اذا اعطية في السؤال المشتقة الثانية والمطلوب ايجاد الميل ⟵

أو $\boxed{y' = \int y''}$

* اما اذا اعطية في السؤال المشتقة الثانية والمطلوب معادلة المنحني فنكامل مرتين . المرة الاولى لايجاد y' ثم نكامل y' لايجاد y

* يجب ايجاد ثابت التكامل (c) بعد كل عملية تكامل

* المخطط السابق يعتبر مفتاح حل جميع اسئلة الاشتقاق والتكامل

مثال 1 اذا كان ميل المنحني عند كل نقطة (x,y) من نقاطه هو $(3x^2-2x+1)$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة $(2,3)$

الحل لاحظ المخطط السابق

اعطيه الميل والمطلوب معادلة المنحني ⟸

$y=\int f'(x)$ معادلة المنحني — الميل هو المشتقة الاولى

$\because y=\int(3x^2-2x+1)dx=\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}+x+c$

$\therefore y=x^3-x^2+x+c$ يجب ايجاد c ثابت التكامل

$\because$ المنحني يمر بالنقطة $(2,3) \longrightarrow$ يحقق معادلة المنحني

لاتنسى ان كل نقطة هي (x,y)

152 $\therefore 3=(2)^3-(2)^2+(2)+c \longrightarrow 3=8-4+2+c \longrightarrow 3=6+c$

$\therefore c=3-6 \longrightarrow c=-3$

$\therefore \boxed{y=x^3-x^2+x-3}$ معادلة المنحني

مثال 2 منحني ميله عند اية نقطة (x,y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$ جد معادلته اذا كان يمر بالنقطة $(0,7)$

الحل نفس فكرة المثال رقم (1)

$y=\int x\sqrt{x^2+9}\,dx \longrightarrow y=\frac{1}{2}\int(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx$

مشتقة داخل القوس

$y=\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c \longrightarrow y=\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}+c$

$\because 7=\frac{1}{3}(0+9)^{\frac{3}{2}}+c \longrightarrow 7=\frac{1}{3}[(3)^2]^{\frac{3}{2}}+c \longrightarrow 7=\frac{1}{3}(3)^3+c$

$7=9+c \longrightarrow \boxed{c=-2} \longrightarrow y=\frac{1}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}-2$ معادلة المنحني

(14/4)

مثال 3 جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x,y) من نقاطه هو $2x-4$ وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3)

الحل

$$y=\int \overset{\text{الميل}}{f'(x)} \longrightarrow y=\int(2x-4)\,dx$$

$$y=\frac{2x^2}{2}-4x+c \longrightarrow y=x^2-4x+c$$

ملاحظة

* لاستخراج c يجب ان نجد نقطة (x,y)

(1) ∵ للمنحني نهاية صغرى أو اذا جاء في السؤال نهاية عظمى أو نقطة حرجة) تعني ان المشتقة الاولى (الميل) = صفر عند (x,y)

(2) اذا جاء في السؤال [للدالة أو للمنحني نهاية عظمى اوصغرى قيمتها (-3) فان ذلك يعني ان $\boxed{y=-3}$ ولايجاد x نجعل الميل (المشتقة الاولى) = صفر

153

$$y'=2x-4$$

$$\therefore 2x-4=0 \longrightarrow 2x=4 \longrightarrow x=2 \longrightarrow (x,y)=(2,-3)$$

نعوضها في $y=x^2-4x+c$ لاستخراج c

$$-3=(2)^2-4(2)+c \longrightarrow -3=4-8+c \longrightarrow -3=-4+c$$

$$-3+4=c \longrightarrow c=1$$

$$\therefore \boxed{y=x^2-4x+1}$$ معادلة المنحني

مثال 4 جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x,y) من نقطه هو x^2-x-2 وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات .

الحل

$$y=\int \text{الميل} \longrightarrow y=\int(x^2-x-2)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة

(15/4)

$\therefore Y = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - 2X + C$

* نحتاج الى نقطة (X,Y) لايجاد C

ملاحظة اذا جاء في السؤال

(1) للمنحني نهاية عظمى تمس محور السينات $\leftarrow Y=0$
او صغرى
النقطة $(X,0)$

(2) للمنحني نهاية عظمى (أو صغرى) تمس محور الصادات $\leftarrow X=0$
النقطة $(0,Y)$

من المثال $\Leftarrow Y=0$ ولايجاد X $\because$ للدالة نهاية عظمى يعني

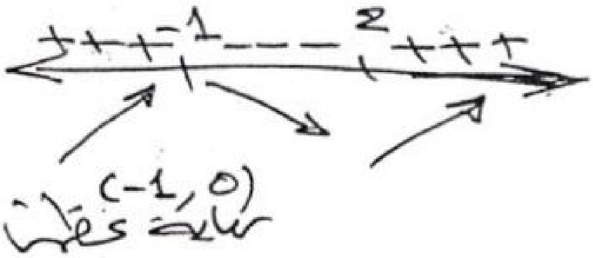
ان $f'(x)=0$ $\Leftarrow$ $x^2 - x - 2 = 0$ ($f'(x)=$ الحل)

$(X-2)(X+1)=0 \xrightarrow{\text{أما}} X-2=0 \rightarrow X=2 \rightarrow (2,0)$

او $X+1=0 \rightarrow X=-1 \rightarrow (-1,0)$

(154)

طريقة ايهما نهاية عظمى نختبر في خط الاعداد



$\therefore$ نختار النقطة $(-1,0)$ نعوضها في معادلة المنحني لايجاد C

$Y = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - 2X + C$

$0 = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + C$

$0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + C \rightarrow 0 = \frac{-2-3+12}{6} + C$

$0 = \frac{+7}{6} + C \rightarrow \boxed{C = \frac{-7}{6}}$

تذكر
$(-1)^3 = -1$
$(-1)^2 = +1$

$\therefore Y = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - 2X - \frac{7}{6}$ معادلة المنحني

(16/4)

مثال 5 جد الدالة التي تحقق $\frac{d^2y}{dx^2}=12x^2-2$ ، $\frac{dy}{dx}=5$ عند النقطة (1,2)

الحل راجع المخطط نلاحظ اعطيت المشتقة الثانية والمطلوب ايجاد الدالة (معادلة المنحني) لذلك نكامل مرتين مع ملاحظة يجب استخراج ثابت التكامل بعد كل عملية تكامل

[لاتنسى] أن $\boxed{y''=\frac{d^2y}{dx^2}}$ وان $\boxed{y'=\frac{dy}{dx}}$

$$\because y'=\int y'' \longrightarrow y'=\int(12x^2-2)\,dx=\frac{12x^3}{3}-2x+c$$

$$y'=4x^3-2x+c_1$$

لاستخراج c_1 نعوض محل $x=1$ وان $y'=5$

$$5=4(1)^3-2(1)+c_1$$

$$5=4-2+c_1 \longrightarrow \boxed{c_1=3} \longrightarrow y'=4x^3-2x+3$$

$$y=\int y' \longrightarrow y=\int(4x^3-2x+3)\,dx=\frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}+3x+c_2$$

$$\therefore y=x^4-x^2+3x+c_2$$

لاستخراج c_2 نعوض $\overset{x}{1},\overset{y}{2}$ (1,2)

$$2=(1)^4-(1)^2+3(1)+c_2 \longrightarrow 2=1-1+3+c_2 \longrightarrow c_2=-1$$

$$\therefore y=x^4-x^2+3x-1$$ معادلة المنحني

وسر بجهلك دونه الأرواح

جبل الارشاد للايام

اترك طريق الجهل فانه يوصلك الى الطرقات

155

(14/4)

مثال 3 جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x,y) من نقاطه هو $2x-4$ وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3)

الحل

$$y=\int f'(x) \xrightarrow{\text{الميل}} y=\int(2x-4)\,dx$$

$$y=\frac{2x^2}{2}-4x+c \rightarrow y=x^2-4x+c$$

ملاحظة

* لاستخراج c يجب ان نجد نقطة (x,y)

(1) ∵ للمنحني نهاية صغرى أو اذا جاء في السؤال نهاية عظمى أو نقطة حرجة) تعني ان المشتقة الاولى (الميل) = صفر عند (x,y)

(2) اذا جاء في السؤال [للدالة أو للمنحني نهاية عظمى او صغرى قيمتها (-3) فان ذلك يعني ان $\boxed{y=-3}$ ولايجاد x نجعل الميل (المشتقة الاولى) = صفر

$y'=2x-4$

$\therefore 2x-4=0 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \rightarrow (x,y)=(2,-3)$

نعوضها في $y=x^2-4x+c$ لاستخراج c

$-3=(2)^2-4(2)+c \rightarrow -3=4-8+c \rightarrow -3=-4+c$

$-3+4=c \rightarrow c=1$

$\therefore \boxed{y=x^2-4x+1}$ معادلة المنحني

153

مثال 4

جد معادلات المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x,y) من نقطه هو x^2-x-2 وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات .

الحل

$$y=\int \text{الميل} \rightarrow y=\int(x^2-x-2)\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

(18/4)

الحل من المستقيم $9x-y-4=0$ نجد الميل

$$m=\frac{-9}{-1}=9 \leftarrow \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \text{ميل المستقيم}$$

$\because$ ميل المنحني $= ax-3x^2$ عند $(1,5)$

$$\therefore \overset{m}{9}=a(1)-3(1)^2 \rightarrow 9=a-3 \rightarrow a=12$$

$\therefore$ ميل المنحني يصبح $y'=12x-3x^2$

$$y=\int y' = \int 12x-3x^2\,dx = \frac{12}{2}x^2-\frac{3}{3}x^3+c$$

$y=6x^2-x^3+c$ ← لاستخراج c نعوض $(1,5)$ في

$$5=6(1)^2-(1)^3+c \rightarrow 5=6-1+c \rightarrow c=0$$

$$\therefore \boxed{y=6x^2-x^3}$$

157

مثال 8 جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة هو (ax^2-6x-9) وللمنحني نقطة انقلاب $(1,-6)$

الحل ملاحظة (1) يجب استخراج قيمة a اولاً

(2) نقطة انقلاب يعني المشتقة الثانية = صفر

(3) الميل يعني المشتقة الاولى

$$m=y'=ax^2-6x-9 \rightarrow y''=2ax-6$$

$$2ax-6=0 \rightarrow 2a(1)-6=0 \rightarrow 2a=6 \rightarrow a=3$$

$$\therefore y'=3x^2-6x-9 \rightarrow y=\int y'=\int(3x^2-6x-9)\,dx$$

$$y=\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}-9x+c \rightarrow y=x^3-3x^2-9x+c$$

$$(1,-6) \rightarrow -6=1-3-9+c \rightarrow c=5 \rightarrow$$

معادلة المنحني $y=x^3-3x^2-9x+5=0$

الأستاذ سعد العيوقي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

التطبيق الاقتصادي للتكامل

لاحظ المخطط

اشتقاق

التكلفة الحدية أو الانتاج الحدي ← التكلفة الكلية أو الانتاج الكلي

تكامل

لاحظ المثال

مثال 1 اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M' = 8 - 6v - 2v^2$ حيث v حجم الانتاج. جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر

الحل لاحظ المخطط ←

$$M = \int M' = \int (8 - 6v - 2v^2)\,dv$$

$$M = 8v - \frac{6v^2}{2} - \frac{2v^3}{3} + c$$

عندما يكون حجم الانتاج $v = 0$ ، $M = 0 \Longleftarrow c = 0$

اي (ما ينتج يباع)

$\therefore$ دالة الايراد الكلي $M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3$

حيث ان الايراد $\boxed{M = \text{الكمية المباعة} \times \text{السعر للوحدة}}$

$\therefore$ دالة السعر $= \dfrac{M}{\text{الكمية المباعة}} = \dfrac{8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3}{v}$

$$= 8 - 3v - \frac{2}{3}v^2$$

على فرض ان ما ينتج يباع

20/4)

مثال 2 اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي T' هي

حيث $T' = 2 + 60V - 5V^2$ حجم الانتاج V جد دالة التكلفة

الحدية علماً ان $T = 65$ ؟

الحل

دالة التكلفة الكلية T هي $T = \int T'$

$$T = \int (2 + 60V - 5V^2)\,dV = 2V - \frac{60}{2}V^2 - \frac{5}{3}V^3 + c$$

$$T = 2V - 30V^2 - \frac{5}{3}V^3 + c$$

دالة التكلفة الكلية $= 65$ عندما حجم الانتاج $V = 0 \Leftarrow$

$$65 = 2(0) - 30(0)^2 - \frac{5}{3}(0)^3 + c \longrightarrow c = 65$$

$\therefore T = 2V - 30V^2 - \frac{5}{3}V^3 + 65$ دالة التكلفة الكلية

(159)

تمارين (2-4)

1) جد معادلة المنحني الذي ميله عند (X,Y) يساوي $\frac{-2}{X^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة $(1,3)$

الحل

$$\boxed{Y = \int Y'} \longrightarrow Y = \int -2X^{-3}\,dX = \frac{-2X^{-2}}{\cancel{-2}} + c$$

$$Y = X^{-2} + c \longrightarrow Y = \frac{1}{X^2} + c$$

$(1,3) = (X,Y) \longrightarrow$

$$3 = \frac{1}{(1)^2} + c \longrightarrow 3 = 1 + c \longrightarrow c = 2$$

$\therefore Y = \frac{1}{X^2} + 2$ معادلة المنحني

(21/4)

(2) جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هي $3x^2-6x-9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10) ؟

الحل

$y=10$ ،

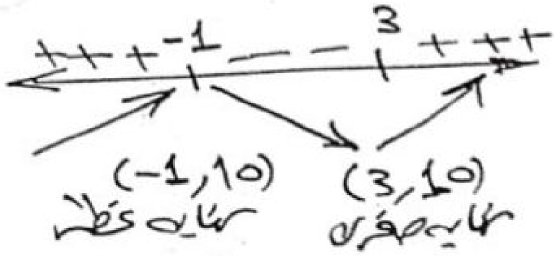
$y'=0$ لايجاد x

$y'=3x^2-6x-9$

$3x^2-6x-9=0 \quad (\div 3)$

$x^2-2x-3=0 \rightarrow (x-3)(x+1)=0$

إما $x=3$ أو $x=-1$



$\therefore$ نختار النقطة $(-1,10)$

لايجاد معادلة المنحني y

$y=\int y'=\int(3x^2-6x-9)\,dx=\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}-9x+c$

160 $y=x^3-3x^2-9x+c \rightarrow 10=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+c$

$10=-1-3+9+c \rightarrow 10=5+c \rightarrow c=5$

$\therefore y=x^3-3x^2-9x+5$ معادلة المنحني

(3) جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $= 6x-2$ وكان ميله عند النقطة $(2,5)$ يساوي (-1)

الحل

$y''=6x-2 \rightarrow y'=\int y''=\int(6x-2)\,dx$

$y'=\frac{6x^2}{2}-2x+c_1 \rightarrow y'=3x^2-2x+c_1$

$y'=-1$, $x=2$

$\therefore -1=3(2)^2-2(2)+c_1 \rightarrow -1=12-4+c_1 \rightarrow c_1=-9$

$y'=3x^2-2x-9 \rightarrow y=\int y'=\int(3x^2-2x-9)\,dx$

$y=\frac{3x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-9x+c_2 \rightarrow 5=(2)^3-(2)^2-9(2)+c_2$

$5=8-4-18+c_2 \rightarrow c_2=19 \rightarrow y=x^3-x^2-9x+19$ معادلة المنحني

(4) منحني يمر بالنقطتين $(2,-3)$ ، $(-1,9)$ وميله عند (x,y) يساوي $ax-5$ جد معادلته حيث $a \in R$.

الحل

$\because y=\int y' \rightarrow y=\int (ax-5)\,dx = \frac{ax^2}{2}-5x+c_1$

$\therefore y=\frac{a}{2}x^2-5x+c \qquad (2,-3)$

$-3=\frac{a}{2}(2)^2-5(2)+c \rightarrow -3=2a-10+c$

$\boxed{7=2a+c}$ ---- 1

$\therefore 9=\frac{a}{2}(-1)^2-5(-1)+c \qquad (-1,9)$

$9=\frac{a}{2}+5+c \rightarrow 4=\frac{a}{2}+c$ ---- 2

$7=2a+\cancel{c}$ —— (1)

بالطرح $\mp 4=\frac{\mp a}{2}\mp \cancel{c}$ —— (2)

$3=2a-\frac{a}{2} \xrightarrow{\times 2} 3\cdot 2=2a\cdot 2-2\cdot\frac{a}{2} \rightarrow 6=4a-a$

$6=3a \rightarrow a=2$

نعوض في (1)

$7=2(2)+c \rightarrow 7=4+c \rightarrow c=3$

$\therefore y=\frac{a}{2}x^2-5x+c \rightarrow y=\frac{2}{2}x^2-5x+3$

$y=x^2-5x+3$ معادلة المنحني

(5) اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M'=12-8v+v^2$ فاوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ماينتج يباع

الحل

$M=\int M'=\int (12-8v+v^2)\,dv$

$M=12v-\frac{8}{2}v^2+\frac{v^3}{3}+c$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

(23/4)

$\therefore M = 12V - 4V^2 + \frac{V^3}{3} + C$

عندما يكون حجم الانتاج $V = 0$ ، $M = 0$ $\Leftarrow$ $0 = 0 - 0 + 0 + C$

$\therefore C = 0$

دالة الايراد الكلي

$\therefore M = 12V - 4V^2 + \frac{V^3}{3}$

لايجاد دالة الطلب (السعر) = $\frac{M}{\text{الكمية المباعة}} = \frac{12V - 4V^2 + \frac{1}{3}V^3}{V}$

على فرض ان ماينتج يباع

$= 12 - 4V + \frac{1}{3}V^2$

(5) اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $T' = 1000 - 5V$ حيث V حجم الانتاج . فاوجد دالة التكلفة الكلية مع العلم ان التكلفة الثابتة $= 150$

الحل

دالة التكلفة الكلية $T \longleftarrow$ $T = \int T'$

$T = \int (1000) - 5V) \, dV$

$T = 1000V - \frac{5}{2}V^2 + C$

دالة التكلفة الكلية $= 150$ عندما يكون حجم الانتاج $V = 0 \longleftarrow$

$150 = 1000(0) - \frac{5}{2}(0)^2 + C \longrightarrow C = 150$

$\therefore T = 1000V - \frac{5}{2}V^2 + 150$ دالة التكلفة الكلية

(162)

نظم وقتك . حاسب نفسك

تابع دروسك . النجاح

المتفائل

(24/4)

The Definite Integral التكامل المحدد

النظرية الأساسية للتكامل المحدد

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ وكانت $F(x)$
عكس مشتقة $f(x)$ اي ان $F'(x)=f(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$$

* $[a,b]$ حدود التكامل حيث b الحد الاعلى ، a الحد الاسفل
* ناتج التكامل = القيمة العليا - القيمة الدنيا
* قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل غير المحدد

امثلة (163

$$1)\ \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{(2)^2}{2}\right]-\left[\frac{(1)^2}{2}\right] = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(2)\ \int_1^2 (3x^2+2x-2)\,dx = \left[\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-2x\right]_1^2 = \left[x^3+x^2-2x\right]_1^2$$

$$= \left[(2)^3+(2)^2-2(2)\right]-\left[(1)^3+(1)^2-2(1)\right] = [8]-0 = 8$$

$$(2)\ \int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx = \int_0^3 (x^2+16)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx$$

نتخلص من الجذر ثم من الكسر

$$= \left[\frac{(x^2+16)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 2\left[\sqrt{(x^2+16)}\right]_0^3 = 2\left[\sqrt{9+16}-\sqrt{0+16}\right]$$

$$= 2[5-4] = 2[1] = 2$$

(3) $\int_{4}^{0} x(x-1)(x-2)\,dx$

ملاحظة

لاحظ حدود التكامل

يجب ان نعكس من الادنى الى الاعلى وفق القاعدة التالية

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

$$\therefore = -\int_0^4 (x^2-x)(x-2)\,dx = -\int_0^4 (x^3-2x^2-x^2+2x)\,dx$$

$$= -\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= -\left(\left[\frac{(4)^4}{4}-\frac{3(4)^3}{3}+\frac{2(4)^2}{2}\right]-\left[\frac{0}{4}-3(0)+0\right]\right) = -[64-64+16] = -16$$

164

(4) $\int_1^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int_1^{125} \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

$$= \int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{2}}\,dx$$

مشتقة $x^{\frac{1}{3}}-1$ هي $\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$

$$= 3\int_1^{125} (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{-3}{2}}\,dx = \left[\frac{\cancel{3}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\cancel{3}}{2}}\right]_1^{125}$$

$$= 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\right]_1^{125} = 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{125}-1)^3} - \sqrt{\sqrt[3]{1}-1}\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{(4)^3} - \sqrt{1-1}\right] = 2\left[\sqrt{64}-0\right] = 2[8]$$

$$= 16$$

الاستاذ ... العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

26/4

(5) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[2\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4$

$= \left[2\sqrt{4}+\frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right]-\left[2\sqrt{1}+\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}\right] = \left[4+\frac{2}{3}(8)\right]-\left[2+\frac{2}{3}\right]$

$= \left[4+\frac{16}{3}\right]-\left[\frac{8}{3}\right] = \left[\frac{28}{3}-\frac{8}{3}\right] = \frac{20}{3}$

(6) $\int_0^a (2x-1)\,dx = 42$ اذا علمت ان $a \in R$ جد قيمة

الحل

$\because \int_0^a (2x-1)\,dx = 42 \longrightarrow \left[\frac{2x^2}{2}-x\right]_0^a = 42$

$[a^2-a]-[0] = 42 \longrightarrow a^2-a-42=0$ (165)

$(a-7)(a+6)=0 \longrightarrow$ اما $a=7$ أو $a=-6$ يهمل

لان التكامل لايجوز $\int_0^{-6}$

(7) $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2+12x+36}\,dx$

$= \int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{(x+6)^2}\,dx = \int_{-6}^{-5} (x+6)^{\frac{2}{3}}\,dx = \left[\frac{(x+6)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5}$

$= \frac{3}{5}\left[(x+6)^{\frac{5}{3}}\right]_{-6}^{-5} = \frac{3}{5}\left[(-5+6)^{\frac{5}{3}}-(-6+6)^{\frac{5}{3}}\right]$

$= \frac{3}{5}\left[1-0\right] = \frac{3}{5}$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٧

27/4

تمارين (4-3)

جد تكاملات كلا مما يأتي

(1) $\int (2x+5)(x+1)\,dx$

$= \int (2x^2+2x+5x+5)\,dx = \int (2x^2+7x+5)\,dx$

$= \frac{2x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}+5x+C = \frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+5x+C$

الأستاذ سعد العبيدي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٢١٨٦

(2) $\int_{-1}^{1} (x^2+3)(x-2)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^3-2x^2+3x-6)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-6x\right]_{-1}^{1}$

166 $= \left[\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{2}{3}+\cancel{\frac{3}{2}}-6\right]-\left[\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}+\cancel{\frac{3}{2}}+6\right] = \frac{-2}{3}-\frac{2}{3}-6-6$

$= \frac{-4}{3}-12 = \frac{-4-36}{3} = \frac{-40}{3}$

(3) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+5)\,dx = \int (x+5x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \frac{x^2}{2}+\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{2}x^2+\frac{10}{3}\sqrt{x^3}+C$

لا تنسى ثابت التكامل يضاف في التكامل غير المحدد فقط

(4) $\int_{0}^{4} \sqrt{x}(x+1)^2\,dx$

$= \int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)\,dx = \int_{0}^{4} (x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \left[\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4} = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{5}\cdot 2x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{4}$

28/4

$$= \left[\frac{2}{7}\left[(2)^2\right]^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}\left[(2)^2\right]^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\left[(2)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right] - [0]$$

$$= \frac{2}{7}(128) + \frac{4}{5}(32) + \frac{2}{3}(8) = \frac{7088}{105}$$

(5) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\, dx$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}(x + 4x^{\frac{1}{2}} + 4)\, dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 2x^2 + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + C$$

(6) $\int_{-1}^{0} \frac{x^3-27}{x-3}\, dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x\right]_{-1}^{0}$$

$$= [0] - \left[\frac{-1}{3} + \frac{3}{2} - 9\right] = -\left[\frac{-2+9-54}{6}\right] = -\left[\frac{-47}{6}\right] = \frac{47}{6}$$

(7) $\int \frac{x^4-1}{x-1}\, dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\, dx$

$$= \int \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{x-1}}\, dx = \int (x^3 + x + x^2 + 1)\, dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + C$$

(8) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot 2x\, dx$

$$= \left[\frac{1}{\cancel{2}} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}}\right]_0^1 = \sqrt{(1+1)} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

29/4

(9) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} = \int (x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}}(x^2+1)$

$= \frac{1}{3}\int (x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}} \cdot 3(x^2+1) = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} + C$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+3x+1)^2} + C$

(10) $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\, dx$

$= \frac{1}{3}\int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}} \cdot 3\, dx = \left[\frac{\frac{1}{\cancel{3}}(3x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{\cancel{3}}}\right]_0^3 = \frac{1}{5}\left[(3x-1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^3$

$= \frac{1}{5}\left[(8)^{\frac{5}{3}} - (-1)^{\frac{5}{3}}\right] = \frac{1}{5}\left[\left[(2)^3\right]^{\frac{5}{3}} + 1\right] = \frac{1}{5}\left[32+1\right] = \frac{33}{5}$

168

(11) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$= \int x^{\frac{-2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)\, dx = \int (x^{\frac{-1}{3}} + x^{\frac{-2}{3}})\, dx$

$= \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$

(12) $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{-1}{2}} = 2\int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}\, dx$

$= \frac{2(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^4} + C$

الأستاذ سعد العبّودي

30/4

(13) $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2x^5+b^2}}dx = \int (a^2x^5+b^2)^{-\frac{1}{5}} \cdot x^4\,dx$

مشتقتها $5a^2x^4$

$= \frac{1}{5a^2}\int (a^2x^5+b^2)^{-\frac{1}{5}} \cdot 5a^2x^4\,dx$

$= \frac{\frac{1}{5a^2}(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + C = \frac{1}{4a^2}\sqrt[5]{(a^2x^5+b^2)^4} + C$

---

(14) $\int_0^8 \sqrt{x^2-14x+49}\,dx$

$= \int_0^8 \sqrt{(x-7)^2}\,dx = \int_0^8 (x-7)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-7x\right]_0^8$

$= [32-56]-0 = -22$

169

---

(15) $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$ مربع كامل

$= \int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \int (2x-3)^{-2}dx = \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-2} \cdot 2\,dx$

$= \frac{\frac{1}{2}(2x-3)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{2(2x-3)} + C = \frac{-1}{4x-6} + C$

---

(16) $\int_{-1}^{1} \sqrt[5]{3x^5-2x^7}\,dx$

عامل مشترك

$= \int_{-1}^{1} \sqrt[5]{x^5(3-2x^2)}\,dx$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة

31/4

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt[5]{x^5}\,\sqrt[5]{3-2x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{5}} \cdot x\,dx$$

مشتقتها $= -4x$

$$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{5}} \cdot -4x\,dx$$

$$= \left[\frac{-\frac{1}{4}(3-2x^2)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^{1} = \frac{-5}{24}\left[(3-2)^{\frac{6}{5}}-(3-2)^{\frac{6}{5}}\right] = \frac{-5}{24}[0] = 0$$

---

(17) $\int \sqrt[3]{2x^5-7x^3}\,dx$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(2x^2-7)}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3}\,\sqrt[3]{2x^2-7}\,dx$$

170) $$= \int (2x^2-7)^{\frac{1}{3}} \cdot x = \frac{1}{4}\int (2x^2-7)^{\frac{1}{3}} \cdot 4x\,dx$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(2x^2-7)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2-7)^4} + c$$

اترك الراحة ..

اترك اصدقاء السوء ..

اترك اضاعة الوقت ..

فان

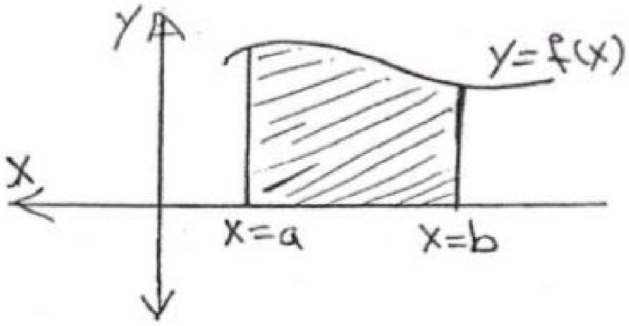
مستقبلك يعتمد على هذه السنة

الأستاذ سعد العبودي

لإعدادية ...

المساحة تحت المنحني

(1) المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$



قانون ايجاد المساحة

$$\boxed{A=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$$

ملاحظات

(1) المساحة عبارة القيمة المطلقة للتكامل المحدد (٧١)
تأخذ القيمة المطلقة لان المساحة وحدة طول (يجب ان تكون موجبة)

(2) المستقيمين $x=a$ ، $x=b$ تمثل حدود التكامل

(3) يجب اولاً ان نجعل الدالة $f(x)=0$ لاستخراج قيم x

(a) اذا كانت قيم $x=c$ تنتمي الى الفترة $[a,b]$ ⟸ نجزء التكامل

$$\boxed{A=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|}$$

$$A=A_1+A_2$$

(b) اذا كانت قيم $x=c$ لا تنتمي الى الفترة ⟸ لا نجزء وانما نكامل حسب الفترة

33/4

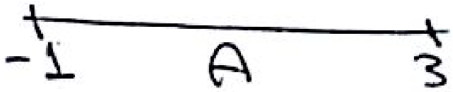
مثال 1

جد مساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-2x-3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3]$ ؟

$f(x)=0 \rightarrow x^2-2x-3=0 \rightarrow (x-3)(x+1)=0$

إما $x-3=0 \rightarrow x=3 \in [-1,3]$

or $x=-1 \in [-1,3]$



لا نجزئ التكامل لعدم وجود نقطة جديدة داخل الفترة

$\therefore A=\left|\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}-3x\right]_{-1}^{3}\right|$

172 $=\left|\left[\frac{27}{3}-9-9\right]-\left[\frac{-1}{3}-1+3\right]\right| = \left|-9-\left(\frac{-1}{3}+2\right)\right|$

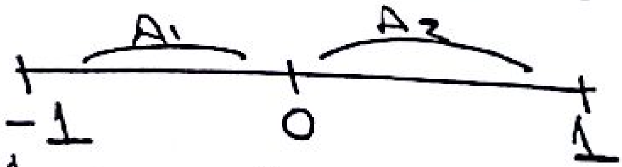
$=\left|-9-\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{32}{3}$ وحدة مساحة مربعة

مثال 2 جد مساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^3-x$ ومحور السينات

الحل

$f(x)=0 \rightarrow x^3-x=0 \rightarrow x(x^2-1)=0$

$x(x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=0 \,,\, x=1 \,,\, x=-1$



$\therefore A=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx\right|$

$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$

$$A=\left|(0)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{(1)^4}{4}-\frac{(1)^2}{2}\right)-(0)\right|$$

$$=\left|-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ unit^2$$

(2) المساحة بين منحني دالتين

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين على الفترة $[a,b]$
فلايجاد المساحة بين المنحنيين نتبع

(1) نكون الدالة الجديدة $R(x)$ وهي عبارة الدالة الاولى - الدالة الثانية

$$R(x)=f(x)-g(x)$$

(2) الدالة الجديدة $R(x)=0$ نستخرج قيم x تمثل حدود التكامل

(3) نكامل بالنسبة الى الدالة الجديدة

$$\boxed{A=\left|\int_a^b R(x)\,dx\right|}$$

173

مثال 1 جد المساحة المحددة بين منحني الدالتين

$$y=g(x)=x^3 \quad , \quad y=f(x)=x$$

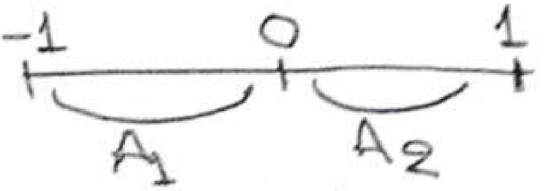
الحل

$$R(x)=x-x^3$$

$$R(x)=0 \rightarrow x-x^3=0 \rightarrow x(1-x^2)=0$$

اما $x=0$ or $1-x^2=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\mp 1$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x-x^3)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx\right|$$



35/4

$$A=\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}\right|$$

وحدة مساحة مربعة

$$=\left|(0)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-(0)\right|=\left|-\left(\frac{1}{4}\right)\right|+\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}\ u$$

مثال 2 لتكن $y=f(x)=x$ وعلى الفترة $[-1,1]$

$y=g(x)=\sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة $[-1,1]$

جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

الحل

$$R(x)=x-\sqrt[3]{x}\longrightarrow R(x)=0$$

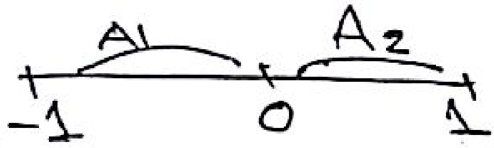
$$x-\sqrt[3]{x}=0\longrightarrow x=\sqrt[3]{x}\xrightarrow{\text{بتكعيب الطرفين}}x^3=x$$

$$x^3-x=0\longrightarrow x(x^2-1)=0\longrightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

أما $x=0\in[-1,1]$ or $x=1\in[-1,1]$ or $x=-1\in[-1,1]$

174

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x-x^{\frac{1}{3}})\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x-x^{\frac{1}{3}})\,dx\right|$$



$$=\left|\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$=\left|(0)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-(0)\right|$$

$$=\left|-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|+\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ unit^2$$

الأستاذ ... العتوي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥١٠٣١٨٦

تمارين (4-4)

(1) جد مساحة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين

$y=f(x)=x^3-4x$ حيث $x=-2$ ، $x=2$

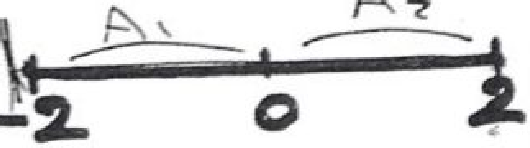
الحل

$$f(x)=0 \rightarrow x^3-4x=0 \xrightarrow{\text{عامل مشترك}} x(x^2-4)=0$$

$x(x-2)(x+2)=0 \longrightarrow$ أما $x=0 \in [-2,2]$

or $x=2 \in [-2,2]$ or $x=-2 \in [-2,2]$

$$\therefore A=\left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right|$$



$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$

$$=\left|(0)-(4-8)\right|+\left|(4-8)-0\right|=|4|+|-4|=4+4=8\text{ unit}^2$$

---

(2) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,1]$ (175

الحل

$$y=0 \longrightarrow x^4-x^2=0 \longrightarrow x^2(x^2-1)=0$$

$x^2(x-1)(x+1)=0 \longrightarrow$ أما $x^2=0 \rightarrow x=0 \in [-1,1]$

or $x=1$ ، $x=-1 \in [-1,1]$

$$\therefore A=A_1+A_2$$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^4-x^2)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$$

37/4

$$A=\left|(0)-\left(\frac{-1}{5}-\frac{-1}{3}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-(0)\right|$$

$$=\left|-\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right|+\left|\frac{3-5}{15}\right|=\left|\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|$$

$$=\left|\frac{3-5}{15}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|=\left|\frac{-2}{15}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}\ unit^2$$

(3) جد مساحة المنطقة المحددة بالدالة $y=f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات

الحل

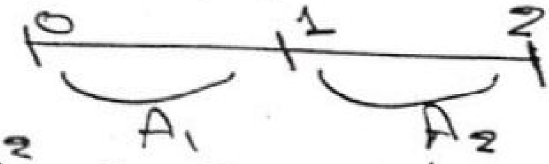
$$f(x)=0 \rightarrow x^3-3x^2+2x=0$$

عامل مشترك

$$x(x^2-3x+2)=0 \rightarrow x(x-2)(x-1)=0$$

اما $x=0$ or $x=2$ or $x=1$

$$A=A_1+A_2$$



(176)

$$A=\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2\right|$$

$$=\left|\left(\frac{1}{4}-1+1\right)-(0)\right|+\left|\left(\frac{16}{4}-8+4\right)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|(0)-\left(\frac{1}{4}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ unit^2$$

Emil
Saad-mhn@yahoo.com

38/4

(4) جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sqrt{x-1}$ ، $g(x)=\frac{1}{2}x$ والمستقيمين $x=5$ ، $x=2$

الحل

$R(x)=\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x$ الدالة المولدة = المحددة - الثانية

$R(x)=0 \rightarrow \sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x=0 \rightarrow \sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x$ بتربيع الطرفين

$x-1=\frac{1}{4}x^2$ بالضرب في 4 $\rightarrow 4x-4=x^2$

$x^2-4x+4=0 \rightarrow (x-2)^2=0 \rightarrow x-2=0$

$x=2 \in [2,5] \rightarrow$ تكامل حسب الفترة المعطاة فقط

$$A=\left|\int_2^5\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}x\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_2^5\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x\right]dx\right|=\left|\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{\frac{1}{2}x^2}{2}\right]_2^5\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^2\right]_2^5\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(5)^2\right]-\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}(2)^2\right]\right|$$

$$=\left|\left[\frac{2}{3}(8)-\frac{25}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}-1\right]\right|$$

$$=\left|\left[\frac{16}{3}-\frac{25}{4}\right]-\left[\frac{2-3}{3}\right]\right|$$

$$=\left|\left[\frac{64-75}{12}\right]-\left[\frac{-1}{3}\right]\right|=\left|\frac{-11}{12}+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-11+4}{12}\right|$$

$$=\left|\frac{-7}{12}\right|=\frac{7}{12}\text{ unit}^2$$

الأستاذ سعد العبودي
إعدادية الجزيرة
٠٧٩٠٥٠٦١١٨٦

177

(5) جد مساحة المحددة بمنحني الدالتين

$y = x^2 \ , \ y = x^4 - 12$

الحل

$R(x) = x^4 - 12 - x^2$

$R(x) = 0 \Longrightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

اما $x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = \mp 2 \longrightarrow [-2, 2]$

أو $x^2 + 3 = 0 \longrightarrow x^2 = -3$ يهمل لاينتمي الى ح

$\therefore A = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2)\, dx \right|$

178 $= \left| \left[\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} \right|$

$= \left| \left[\frac{(2)^5}{5} - 12(2) - \frac{(2)^3}{3} \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - 12(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right] \right|$

$= \left| \left[\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} \right] - \left[\frac{-32}{5} + 24 - \frac{-8}{3} \right] \right|$

$= \left| \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} \right|$

$= \left| \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right| = \left| \frac{192 - 80 - 720}{15} \right|$

$= \left| \frac{-608}{15} \right| = \frac{608}{15} \ unit^2$

تم بحمد الله تعالى

الأستاذ سعد العبودي

(41)/3

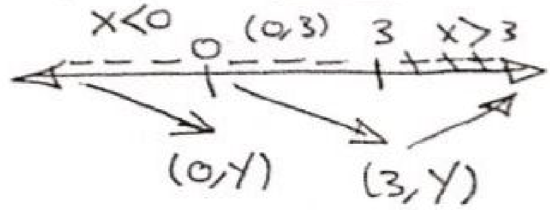
(6) $f(x)=x^3(-4+x)$

الحل

$f(x)=-4x^3+x^4 \longrightarrow f'(x)=-12x^2+4x^3$

$-12x^2+4x^3=0 \xrightarrow{\div 4} -3x^2+x^3=0 \xrightarrow{\text{عامل مشترك}} x^2(-3+x)=0$

$x^2=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$ أو $-3+x=0 \longrightarrow \boxed{x=3}$



مناطق التزايد $\{x \,,\, x\in R : x>3\}$

مناطق التناقص $(1)\{x : x<0\}$

$(2)\ (0,3)$

عندما $x=0 \xrightarrow[\text{الدالة الاصلية}]{\text{نعوض في}} f(0)=0(-4+0)=0$

$\therefore (0,0)$ مجرد نقطة حرجة

عندما $x=3 \longrightarrow f(3)=(3)^3[-4+3]$

$=27(-1)=-27 \longrightarrow (3,-27)$ نقطة نهاية صغرى محلية 104

(7) * اذا كانت $f(x)=x^3+ax+5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x=1$ جد قيمة (a) و بين نوع النهاية

الحل $\because$ الدالة لها نقطة نهاية محلية عند $x=1 \Leftarrow$ نجد المشتقة الاولى ثم = صفر ونعوض عن كل x بـ 1

$f'(x)=3x^2+a \longrightarrow 3x^2+a=0 \longrightarrow 3(1)^2+a=0$

$3+a=0 \longrightarrow \boxed{a=-3}$

$\therefore f(x)=x^3-3x+5 \longrightarrow f'(x)=3x^2-3=0$

$3x^2=3 \xrightarrow{\div 3} x^2=1 \longrightarrow \therefore x=\mp 1$

روابط شبكة رحلة التفوق

قناة رحلة التفوق في السادس https://telegram.me/A_M_Z_F

روبوت رحلة التفوق في السادس https://telegram.me/Sadss6_bot

قناة التفوق اا اللغة العربية https://telegram.me/Arab_R_T

قناة التفوق اا اللغة الإنكليزية https://telegram.me/English_R_T

قناة التفوق اا الرياضيات علمي https://telegram.me/Math_R_T

قناة التفوق اا الفيزياء https://telegram.me/Phys_R_T

قناة التفوق اا الاحياء https://telegram.me/Bio_R_T

قناة التفوق اا الكيمياء https://telegram.me/Chem_R_T

قناة التفوق اا رياضيات تطبيقي https://telegram.me/burhanmath

قناة التفوق اا الادبي https://telegram.me/R_A_I_S_tg

قناة التفوق اا رياضيات ادبي http://telegram.me/rafidmob

قناة التفوق اا نصائح وأمل https://telegram.me/joinchat/Bm5U2z7gQI9bGQR7O1RDlg

انستا https://www.instagram.com/rhlt_altafawk

الموقع الالكتروني http://www.program6th.info

فيسبوك http://fb.me/Rehlat.Al.Tafok.In.6th

http://fb.me/Rehlat.Al.Tafok.In.6th

نعمل لجل عراق أفضل

لا للمستقبل الفردي والتفكير لجل كسب المال لكي تصرف على أمور لا تنفع المجتمع فقط للمنفعة الشخصية